Gedanken über ein einzigartiges Geschlecht von Reihen*

Leonhard Euler

Im Briefwechsel, welchen ich einst mit dem hochillustren Goldbach gepflegt hatte, unter anderen Betrachtungen verschiedenen Gegenstandes haben wir über in der allgemeinen Form

$$1 + \frac{1}{2^m}(1 + \frac{1}{2^n}) + \frac{1}{3^m}(1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}) + \frac{1}{4^m}(1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n}) + etc.$$

erfassten Reihen geredet und deren Summen untersucht. Obgleich aber Reihen von dieser Art selten aufzutauchen pflegen und wenig an Nutzen zu versprechen scheinen, scheinen die Untersuchungen, zu welchen deren Betrachtung uns geführt hatte, umso mehr würdig, dass sie von der Vergessenheit und dem Untergang bewahrt werden, weil die Methoden, die wir bei der Gelegenheit gebraucht haben, sich um Vieles weiter erstrecken und vielleicht irgendwann einmal in der Analysis einen auffallenden Nutzen verschaffen können. So habe ich also nicht so diese Reihe selbst, auch wenn sie für sich betrachtet keineswegs zu verachten scheint, wie die verschiedenen Methoden, die zu ihrer Summation führen, hier darzulegen beschlossen; weil ja diese Dinge aus jenem Briefwechsel entnommen sind, möchte ich die Leser hier sofort am Anfang darauf aufmerksam machen, dass diese Untersuchungen zum größte Teil dem Scharfsinn des hochillustren Goldbach zuzuschreiben sind. Es führen aber hauptsächlich drei Wege zur Summation von Reihen dieser Art, weil ja welche voneinander in höchstem Maße verschieden sind, werde

*Originaltitel: „Meditationes circa singulare serierum genus“ *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 20, 1776, pp. 140-186, Nachdruck in *Opera Omnia*: Series 1, Volume 15, pp. 217 - 267, Eneström-Nummer E477, übersetzt von Alexander Aycock, Textsatz: Jennifer Pütz, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz“

ich jede einzelne gesondert darstellen, damit, wie viel jede beliebige nützt, leichter erkannt werden kann.

Erste Methode, zu Reihen von dieser Art zu gelangen

§1. Wenn man irgendwelche zwei Reihen hat, deren Summe bekannt sei

$$1 + a + b + c + d + e + \text{etc.} = t$$

und

$$1 + \alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon + \text{etc.} = u,$$

dann aber darüber hinaus die Summe der aus diesen Reihen zusammengeflossenen Reihe bekannt ist, natürlich

$$1 + a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta + e\epsilon + \text{etc.} = v,$$

dann wird, indem jene Reihen miteinander multipliziert werden, erschlossen

$$\begin{gathered}1 + a(1+\alpha) + b(1+\alpha+\beta) + c(1+\alpha+\beta+\gamma) + \text{etc.} + \\ 1 + \alpha(1+a) + \beta(1+a+b) + \gamma(1+a+b+c) + \text{etc.} = tu + v,\end{gathered}$$

was freilich per se offenbar ist, weil ja in diesen zwei letzten Reihen alle Produkte der einzelnen Terme der ersten Reihe mit den einzelnen der zweiten; es sei mehr angemerkt, dass die Produkte jedes Termes der ersten Reihe mit dem entsprechenden Term der zweiten, wie beispielsweise $1 \cdot 1$, $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, $d\delta$ etc., zweimal auftauchen, weil welche im Produkt tu nur einmal aufgefunden werden, war es deshalb von Nöten, dass zu diesem darüber hinaus die Reihe v hinzugefügt wird.

§2. Wenn wir nun die Summe der Reihe

$$1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \text{etc.}$$

ins Unendliche fortgesetzt durch $\int \frac{1}{z^m}$ bezeichnen, dass gilt

$$1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{5^m} + \text{etc.} = \int \frac{1}{z^m}$$

und
$$1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}=\int\frac{1}{z^n},$$
und auf die gleiche Weise für die daraus vereinigte Reihe
$$1+\frac{1}{2^{m+n}}+\frac{1}{3^{m+n}}+\frac{1}{4^{m+n}}+\frac{1}{5^{m+n}}+\text{etc.}=\int\frac{1}{z^{m+n}},$$
und wir aus diesen die zwei folgenden Reihen, die in der vorgelegten Form enthalten sein werden, bilden
$$1+\frac{1}{2^m}(1+\frac{1}{2^n})+\frac{1}{3^m}(1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n})+\frac{1}{4^m}(1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n})+etc.=P,$$
$$1+\frac{1}{2^n}(1+\frac{1}{2^m})+\frac{1}{3^n}(1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m})+\frac{1}{4^n}(1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{4^m})+etc.=Q,$$
werden wir aus dem oben aufgestellten Prinzip haben
$$P+Q=\int\frac{1}{z^m}\cdot\int\frac{1}{z^n}+\int\frac{1}{z^{m+n}},$$
woher, wenn die Summe der einen dieser zwei neuen Reihen irgendwoher bekannt wäre, daraus auch die Summe der anderen Reihen angegeben werden könnte. Aber die Summe der Reihen
$$1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{4^m}+\text{etc.}\qquad\text{oder}\qquad\int\frac{1}{z^m}$$
sehen wir hier als bekannt an, weil ja, sooft der Exponent m eine gerade Zahl ist, diese Summen von mir durch die Peripherie des Kreises bestimmt worden sind; für die Fälle, in denen m eine ungerade Zahl ist, können aber die Summen in der Tat leicht näherungsweise aufgefunden werden.

§3. Wann immer die Exponenten m und n gleich angenommen werden, stimmen die gefundenen Reihen überein und wir erlangen also in diesem Fall die folgende Summation
$$1+\frac{1}{2^n}(1+\frac{1}{2^n})+\frac{1}{3^n}(1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n})+\frac{1}{4^n}(1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n})+\text{etc.}$$
$$=\frac{1}{2}(\int\frac{1}{z^n})^2+\frac{1}{2}\int\frac{1}{z^{2n}}.$$

Deshalb, wenn wir, im Begriff spezielle Fälle zu betrachten, festlegen

$$\begin{aligned}
1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\text{etc.} &= \Delta = \int \frac{1}{z},\\
1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\text{etc.} &= A = \int \frac{1}{z^2},\\
1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+\text{etc.} &= B = \int \frac{1}{z^3},\\
1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\text{etc.} &= C = \int \frac{1}{z^4},\\
1+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{4^5}+\frac{1}{5^5}+\text{etc.} &= D = \int \frac{1}{z^5},\\
&\text{etc.},
\end{aligned}$$

und auf die gleiche Weise weiter

$$\int \frac{1}{z^6} = E, \int \frac{1}{z^7} = F, \int \frac{1}{z^8} = G, \int \frac{1}{z^9} = H, \int \frac{1}{z^{10}} = I, \text{etc.}$$

gewinnen wir daher die folgenden Summationen

$$\begin{aligned}
1+\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2})+\frac{1}{3}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})+\text{etc.} &= \frac{1}{2}\Delta\Delta+\frac{1}{2}A,\\
1+\frac{1}{2^2}(1+\frac{1}{2^2})+\frac{1}{3^2}(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2})+\text{etc.} &= \frac{1}{2}AA+\frac{1}{2}C,\\
1+\frac{1}{2^3}(1+\frac{1}{2^3})+\frac{1}{3^3}(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3})+\text{etc.} &= \frac{1}{2}BB+\frac{1}{2}E,\\
1+\frac{1}{2^4}(1+\frac{1}{2^4})+\frac{1}{3^4}(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4})+\text{etc.} &= \frac{1}{2}CC+\frac{1}{2}G,\\
1+\frac{1}{2^5}(1+\frac{1}{2^5})+\frac{1}{3^5}(1+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5})+\text{etc.} &= \frac{1}{2}DD+\frac{1}{2}I,\\
&\text{etc.},
\end{aligned}$$

wo es freilich passend ist, dass angemerkt wird, dass die Summe der ersten Reihe Δ unendlich ist, die übrigen hingegen alle endlich.

§4. Aber wenn die Exponenten m und n ungleich Null sind, werden auf diese Weisen Reihen der Form, die wir betrachten, erhalten, von welchen sich freilich die Summe keiner der beiden einzeln mit dieser Methode bestimmen lässt; aber dennoch kann die Summe der beiden zusammengenommen dargeboten werden, wie wir zuvor gezeigt haben. Damit dies klarer gemacht wird und sich zugleich kurz gefasst wird, wollen wir die Summe dieser Reihe

$$1+\frac{1}{2^m}(1+\frac{1}{2^n})+\frac{1}{3^m}(1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n})+\frac{1}{4^m}(1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n})+\text{etc.}$$

mit diesem Schriftzug $\int \frac{1}{z^m}(\frac{1}{y^n})$ anzeigen, so dass man nach Vertauschen der Exponenten $\int \frac{1}{z^n}(\frac{1}{y^m})$ hat. Nachdem diese Dinge angemerkt worden sind, haben also gefunden, dass sein wird

$$\int \frac{1}{z^m}(\frac{1}{y^n})+\int \frac{1}{z^n}(\frac{1}{y^m})=\int \frac{1}{z^m}\cdot\int \frac{1}{z^n}+\int \frac{1}{z^{m+n}}.$$

Wenn daher also anderswoher die Summe der einen dieser Summen bekannt geworden ist, wird daher auch die Summe der anderen Reihe bekannt sein; und mehr lässt sich aus dieser ersten Methode nicht schließen, woher ich dazu fortschreite, die zweite zu entwickeln.

Zweite Methode, zu Reihen von dieser Art zu gelangen

§5. Unter Beibehalt der vorhergehenden Bezeichnungsweise ist es klar, dass die Größe

$$\int \frac{1}{z^m}\cdot\int \frac{1}{z^n}-\int \frac{1}{z^{m+n}}$$

auf die folgenden unterschiedlichen Reihen zurückgeführt wird

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1\cdot 2^n}+\frac{1}{2^m\cdot 3^n}+\frac{1}{3^m\cdot 4^n}+\text{etc.}+\frac{1}{1\cdot 2^m}+\frac{1}{2^n\cdot 3^m}+\frac{1}{3^n\cdot 4^m}+\text{etc.}\\
+&\frac{1}{1\cdot 3^n}+\frac{1}{2^m\cdot 4^n}+\frac{1}{3^m\cdot 5^n}+\text{etc.}+\frac{1}{1\cdot 3^m}+\frac{1}{2^n\cdot 4^m}+\frac{1}{3^n\cdot 5^m}+\text{etc.}\\
+&\frac{1}{1\cdot 4^n}+\frac{1}{2^m\cdot 4^n}+\frac{1}{3^m\cdot 6^n}+\text{etc.}+\frac{1}{1\cdot 4^m}+\frac{1}{2^n\cdot 5^m}+\frac{1}{3^n\cdot 6^m}+\text{etc.}\\
+&\frac{1}{1\cdot 5^n}+\frac{1}{2^m\cdot 6^n}+\frac{1}{3^m\cdot 7^n}+\text{etc.}+\frac{1}{1\cdot 5^m}+\frac{1}{2^n\cdot 6^m}+\frac{1}{3^n\cdot 7^m}+\text{etc.}\\
&\qquad\qquad\text{etc.}\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{etc.}
\end{aligned}$$

und die ganze Aufgabe geht nun darauf zurück, dass diese einzelnen Reihen bequem summiert werden; dadurch selbst wird ein eigenes Geschlecht von Reihen umfassendes, äußerst reichhaltiges Feld eröffnet welches wegen der Gefälligkeit per se der ganzen Aufmerksamkeit würdig scheint, obgleich sie mit unserem Unternehmen mit nicht so einem engen Band verbunden waren.

§6. Diese Summationen können aber nicht angenehmer ausfindig gemacht werden als, indem die einzelnen Terme, deren Form diese ist

$$\frac{1}{x^m(x+a)^n},$$

in einfachere Brüche aufgelöst werden. Aber durch die Dinge, die ich aber diesen Gegenstand in „Einleitung in die Analysis"angegeben habe, tritt es klar zutage, dass dieser Bruch in die folgenden zerteilt werden kann

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^n}\frac{1}{x^m} - \frac{n}{1\cdot a^{n+1}}\frac{1}{x^{m-1}} + \frac{n(n+1)}{1\cdot 2\cdot a^{n+2}}\frac{1}{x^{m-2}} - \frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot a^{n+3}}\frac{1}{x^{m-3}} + \text{etc.}\\ \pm\frac{1}{a^m}\frac{1}{(x+a)^n} \pm \frac{m}{1\cdot a^{m+1}}\frac{1}{(x+a)^{n-1}} \pm \frac{m(m+1)}{1\cdot 2\cdot a^{m+2}}\frac{1}{(x+a)^{n-2}}\\ \pm\frac{m(m+1)(m+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot a^{m+3}}\frac{1}{(x+a)^{n-3}} \pm \text{etc.},\end{aligned}$$

wo festzuhalten ist, dass in der unteren Reihe das Vorzeichen $+$ gilt, wenn m eine gerade Zahl ist, andernfalls hingegen das untere Vorzeichen; dann muss aber jede der beide Reihen nicht weiter fortgesetzt werden als bis hin zu den Termen, wo der Exponent der Potenzen von x und $x+a$ bis hin zur Einheit vermindert worden war.

§7. daher lässt sich also zuerst die Summe dieser Reihe

$$\frac{1}{1(a+1)^n} + \frac{1}{2^m(a+2)^n} + \frac{1}{3^m(a+3)^n} + \frac{1}{4^m(a+4)^n} + \text{etc.} = s$$

bestimmen, während in der gerade dargebotenen Form anstelle von x alle Zahlen $1, 2, 3$ etc. bis ins Unendliche eingesetzt werden und zu einer Summe gesammelt werden. Weil ja alle aus der Formel

$$A\frac{1}{x^\lambda}$$

entstehenden Terme eine Reihe geben, deren Summe wir durch

$$A\int\frac{1}{x^\lambda}$$

ausdrücken, aus der Formel

$$A\frac{1}{(x+a)^\lambda}$$

aber eine Reihe hervorgeht, deren Summe diese ist

$$A\int\frac{1}{z^\lambda}-A(1+\frac{1}{2^\lambda}+\frac{1}{3^\lambda}+\dots+\frac{1}{a^\lambda}),$$

wird sich die Summe unserer Reihe so verhalten

$$\begin{aligned}s=&\frac{1}{a^n}\int\frac{1}{z^m}-\frac{n}{1\cdot a^{n+1}}\int\frac{1}{z^{m-1}}+\frac{n(n+1)}{1\cdot 2\cdot a^{n+2}}\int\frac{1}{z^{m-2}}\\ &-\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot a^{n+3}}\int\frac{1}{z^{m-3}}+\text{etc.}\\ &\pm\frac{1}{a^m}\int\frac{1}{z^n}\pm\frac{m}{1\cdot a^{m+1}}\int\frac{1}{z^{n-1}}\pm\frac{m(m+1)}{1\cdot 2\cdot a^{m+2}}\int\frac{1}{z^{n-2}}\\ &\pm\frac{m(m+1)(m+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot a^{m+3}}\int\frac{1}{z^{n-3}}\pm\text{etc.}\\ &\mp\frac{1}{1\cdot a^m}(1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\dots+\frac{1}{a^n})\\ &\mp\frac{m}{1\cdot a^{m+1}}(1+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{3^{n-1}}+\dots+\frac{1}{a^{n-1}})\\ &\mp\frac{m(m+1)}{1\cdot 2\cdot a^{m+2}}(1+\frac{1}{2^{n-2}}+\frac{1}{3^{n-2}}+\dots+\frac{1}{a^{n-2}})\\ &\mp\frac{m(m+1)(m+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot a^{m+3}}(1+\frac{1}{2^{n-3}}+\frac{1}{3^{n-3}}+\dots+\frac{1}{a^{n-3}})\\ \text{etc.,}\end{aligned}$$

wo die oberen Vorzeichen zu gebrauchen sind, sooft m eine gerade Zahl ist, andernfalls aber die unteren. Dieser Ausdruck ist aber immer endlich weil ja jede der beiden Reihen der Terme nur bis hin zu $\int\frac{1}{z}$ fortgesetzt werden muss.

§8. Es werden nun auch dem Buchstaben a alle Werte von der Einheit bis hin zu Unendlich zugeteilt, dass wir in einer Summe alle in §5 auf der linken Seiten notierten unendlichen Reihen der ersten Ordnung erfassen; und deren

Summe wird so dargestellt aufgefunden werden

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{1}{z^n} \cdot \int \frac{1}{z^m} - \frac{n}{1} \int \frac{1}{z^{n+1}} \cdot \int \frac{1}{z^{m-1}} + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} \int \frac{1}{z^{n+2}} \cdot \int \frac{1}{z^{m-2}} \\
&\quad - \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \int \frac{1}{z^{n+3}} \cdot \frac{1}{z^{n-3}} + \text{etc.} \\
&\quad \pm \int \frac{1}{z^m} \cdot \frac{1}{z^n} \mp \int \frac{1}{z^m} (\frac{1}{y^n}) \\
&\quad \pm \frac{m}{1} \int \frac{1}{z^{m+1}} \cdot \int \frac{1}{z^{n-1}} \mp \frac{m}{1} \int \frac{1}{z^{m+1}} (\frac{1}{y^{n-1}}) \\
&\quad \pm \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2} \int \frac{1}{z^{m+2}} \cdot \int \frac{1}{z^{n-2}} \mp \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2} \int \frac{1}{z^{m+2}} (\frac{1}{y^{n-2}}) \\
&\quad \pm \frac{m(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \int \frac{1}{z^{m+3}} \cdot \int \frac{1}{z^{n-3}} \mp \frac{m(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \int \frac{1}{z^{m+3}} (\frac{1}{y^{n-3}}) \\
&\quad \text{etc.}
\end{aligned}
$$

und auf die gleiche Weise, indem die Exponenten m und n vertauscht werden, wird die Summe der anderen in §5 rechts geschriebenen Ordnung von Reihe entspringen. Nachdem also diese Ausdrücke verbunden worden sind, wird die Größe

$$\int \frac{1}{z^m} \cdot \int \frac{1}{z^n} - \int \frac{1}{z^{m+n}}$$

in die folgende Form verwandelt, welche zweiteilig dargeboten zu werden passend ist:

Erster Teil

$$
\begin{aligned}
&+ (1 \pm 1) \int \frac{1}{z^m} \cdot \frac{1}{z^n} \mp \int \frac{1}{z^m} (\frac{1}{y^n}) \\
&- \frac{m}{1} (1 \mp 1) \int \frac{1}{z^{m+1}} \cdot \int \frac{1}{z^{n-1}} \mp \frac{m}{1} \int \frac{1}{z^{m+1}} (\frac{1}{y^{n-1}}) \\
&+ \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2} (1 \pm 1) \int \frac{1}{z^{m+2}} \cdot \int \frac{1}{z^{n-2}} \mp \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2} \int \frac{1}{z^{m+2}} (\frac{1}{y^{n-2}}) \\
&- \frac{m(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (1 \mp 1) \int \frac{1}{z^{m+3}} \cdot \int \frac{1}{z^{n-3}} \mp \frac{m(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \int \frac{1}{z^{m+3}} (\frac{1}{y^{n-3}}) \\
&\quad \text{etc.,}
\end{aligned}
$$

wo die oberen Vorzeichen gelten, wenn m eine gerade Zahl ist, die unteren hingegen, wenn m eine ungerade Zahl ist.

ANDERER TEIL

$$+(1\pm 1)\int\frac{1}{z^n}\cdot\frac{1}{z^m}\mp\int\frac{1}{z^n}(\frac{1}{y^m})$$
$$-\frac{n}{1}(1\mp 1)\int\frac{1}{z^{n+1}}\cdot\int\frac{1}{z^{m-1}}\mp\frac{n}{1}\int\frac{1}{z^{n+1}}(\frac{1}{y^{m-1}})$$
$$+\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}(1\pm 1)\int\frac{1}{z^{n+2}}\cdot\int\frac{1}{z^{m-2}}\mp\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}\int\frac{1}{z^{n+2}}(\frac{1}{y^{m-2}})$$
$$-\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}(1\mp 1)\int\frac{1}{z^{n+3}}\cdot\int\frac{1}{z^{m-3}}\mp\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\int\frac{1}{z^{n+3}}(\frac{1}{y^{m-3}})$$
etc.,

wo die oberen Vorzeichen gelten, wenn n eine gerade Zahl ist, andernfalls gelten aber die unteren.

§9. Je nachdem ob die Exponenten m und n entweder gerade oder ungerade Zahlen waren, werden diese Ausdrücke auf weniger Terme zurückgeführt; es wird natürlich sein:

DER ERSTE TEIL, WENN m EINE GERADE ZAHL IST

$$2\int\frac{1}{z^m}\cdot\frac{1}{z^n}-\int\frac{1}{z^m}(\frac{1}{y^n})-\frac{m}{1}\int\frac{1}{z^{m+1}}(\frac{1}{y^{n-1}})+\frac{2m(m+1)}{1\cdot 2}\int\frac{1}{z^{m+2}}\cdot\int\frac{1}{z^{n-2}}$$
$$-\frac{m(m+1)}{1\cdot 2}\int\frac{1}{z^{m+2}}(\frac{1}{y^{n-2}})-\frac{m(m+1)(m+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\int\frac{1}{z^{m+3}}(\frac{1}{y^{n-3}})$$
etc.,

oder auf diese Weise

$$2\int\frac{1}{z^m}\cdot\frac{1}{z^n}+\frac{2m(m+1)}{1\cdot 2}\int\frac{1}{z^{m+2}}\cdot\int\frac{1}{z^{n-2}}$$
$$+\frac{2m(m+1)(m+2)(m+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\int\frac{1}{z^{m+4}}\cdot\frac{1}{z^{n-4}}+\text{etc.}$$
$$-\int\frac{1}{z^m}(\frac{1}{y^n})-\frac{m}{1}\int\frac{1}{z^{m+1}}(\frac{1}{y^{n-1}})-\frac{m(m+1)}{1\cdot 2}\int\frac{1}{z^{m+2}}(\frac{1}{y^{n-2}})-\text{etc.}$$

ERSTER TEIL, WENN m EINE UNGERADE ZAHL IST

$$-\frac{2m}{1}\int\frac{1}{z^{m+1}}\cdot\int\frac{1}{z^{n-1}}-\frac{2m(m+1)(m+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\int\frac{1}{z^{m+3}}\cdot\int\frac{1}{z^{n-3}}-\text{etc.}$$
$$+\int\frac{1}{z^{m}}(\frac{1}{y^{n}})+\frac{m}{1}\int\frac{1}{z^{m+1}}(\frac{1}{y^{n-1}})+\frac{m(m+1)}{1\cdot 2}\int\frac{1}{z^{m+2}}(\frac{1}{y^{n-2}})+\text{etc.}$$

ZWEITER TEIL, WENN n EINE GERADE ZAHL IST

$$2\int\frac{1}{z^{n}}\cdot\frac{1}{z^{m}}+\frac{2n(n+1)}{1\cdot 2}\int\frac{1}{z^{n+2}}\cdot\int\frac{1}{z^{m-2}}$$
$$+\frac{2n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\int\frac{1}{z^{n+4}}\cdot\frac{1}{z^{m-4}}+\text{etc.}$$
$$-\int\frac{1}{z^{n}}(\frac{1}{y^{m}})-\frac{n}{1}\int\frac{1}{z^{n+1}}(\frac{1}{y^{m-1}})-\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}\int\frac{1}{z^{m+2}}(\frac{1}{y^{n-2}})-\text{etc.}$$

ZWEITER TEIL, WENN n EINE UNGERADE ZAHL IST

$$-\frac{2n}{1}\int\frac{1}{z^{n+1}}\cdot\int\frac{1}{z^{m-1}}-\frac{2n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\int\frac{1}{z^{n+3}}\cdot\int\frac{1}{z^{m-3}}-\text{etc.}$$
$$+\int\frac{1}{z^{n}}(\frac{1}{y^{m}})+\frac{n}{1}\int\frac{1}{z^{n+1}}(\frac{1}{y^{m-1}})+\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}\int\frac{1}{z^{n+2}}(\frac{1}{y^{m-2}})+\text{etc.}$$

§10. In diesen Formeln wird es förderlich sein angemerkt zu haben, dass Reihen der Form, die wir hier betrachten

$$\int\frac{1}{z^{\mu}}(\frac{1}{y^{\nu}}),$$

nicht nur auftauchen, sondern auch alle so beschaffen sind, dass die Summe der Exponenten $\mu+\nu$ überall dieselbe $=m+n$ ist. Deshalb wird es passend sein, dass unsere Untersuchungen, so in Ordnungen eingeteilt werden, dass alle Auflösungen, in denen die Summe der Exponenten $m+n$ dieselbe ist, zu derselben Ordnung gerechnet werden, weil ja in diesen dieselben Reihen, die ich hier zu entwickeln beschlossen habe, auftauchen; und wenn wir den in der ersten Methode gefundenen Lehrsatz, nach welchem gilt

$$\int\frac{1}{z^{m}}(\frac{1}{y^{n}})+\int\frac{1}{z^{n}}(\frac{1}{y^{m}})=\int\frac{1}{z^{m}}\int\frac{1}{z^{n}}+\int\frac{1}{z^{m+n}},$$

zur Hilfe nehmen, werden wir daher die einzelnen Reihen unserer Form $\int\frac{1}{z^{\mu}}(\frac{1}{y^{\nu}})$ getrennt bestimmen können. Weil aber die Exponenten m und n nicht kleiner als die Einheit sein können, wird für die erste Ordnung $m+n=2$ sein, für die zweite $m+n=3$, für die dritte $m+n=4$ und so weiter; weil aber $\int \frac{1}{z}$ unendlich ist, müssen für Reihen, deren Summe endlich ist, dieses Unendliche aus der Rechnung herausgehen.

Erste Ordnung, in der $m+n=2$ ist

§11. Hier ist also auf eine einzige Weise $m=1$ und $n=1$; der Ausdruck

$$\int \frac{1}{z} \cdot \int \frac{1}{z} - \int \frac{1}{z^2}$$

wird in den folgenden aufgelöst

$$\int \frac{1}{z}(\frac{1}{y}) + \int \frac{1}{z}(\frac{1}{y}) = 2\int \frac{1}{z}(\frac{1}{y}).$$

Die erste Methode gibt aber

$$2\int \frac{1}{z}(\frac{1}{y}) = \int \frac{1}{z} \cdot \int \frac{1}{z} + \int \frac{1}{z^2},$$

welche der gegenwärtigen Form zu widersprechen scheint; aber weil $\int \frac{1}{z}$ unendlich ist, ist in Einbetracht ihrer natürlich der andere Teil $\int \frac{1}{z^2}$ für verschwindend zu halten. Dieses Grundes wegen lässt sich daher nichts für unser Unternehmen schließen.

Zweite Ordnung, in der $m+n=3$ ist

§12. Hier ist wiederum auf einzige Weise $m=2$ und $n=1$, weil ja die Vertauschung dieser Exponenten keinen Unterschied macht. Daher wird dieser Ausdruck

$$\int \frac{1}{z^2} \cdot \int \frac{1}{z} - \int \frac{1}{z^3}$$

in diesen aufgelöst

$$2\int \frac{1}{z^2} \cdot \int \frac{1}{z} - \int \frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y}\right) - 2\int \frac{1}{z^2} \cdot \int \frac{1}{z} + \int \frac{1}{z}\left(\frac{1}{y^2}\right) + \int \frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y}\right),$$

welcher zu diesem zusammengezogen wird

$$\int \frac{1}{z}\left(\frac{1}{y^2}\right).$$

Durch die erste Methode ist aber

$$\int \frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y}\right) + \int \frac{1}{z}\left(\frac{1}{y^2}\right) = \int \frac{1}{z^2} \cdot \int \frac{1}{z} + \int \frac{1}{z^3},$$

woher zu folgen scheint

$$\int \frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y}\right) = 2\int \frac{1}{z^3};$$

auch wenn diese Schlussfolgerung richtig ist, wie wir später sehen werden, ist es dennoch daher wegen der Unendlichkeit nicht möglich, ihr hinreichend zu vertrauen. Es wird also sein

$$\begin{aligned} &1 + \frac{1}{2^2}\left(1+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) + \text{etc.} \\ &= 2\int \frac{1}{z^3} = 2\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \text{etc.}\right), \end{aligned}$$

welche Gleichheit natürlich der ganzen Aufmerksamkeit würdig ist.

DRITTE ORDNUNG, IN WELCHER $m + n = 4$ IST

§13. Hier sind zwei Fälle zu betrachten,deren erster dieser ist $m = 3$ und $n = 1$, welcher die Form

$$\int \frac{1}{z^3} \cdot \int \frac{1}{z} - \frac{1}{z^4}$$

in diese aufgelöst wird

$$\int \frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y}\right) - 2\int \frac{1}{z^2} + \int \frac{1}{z}\left(\frac{1}{y^3}\right) + \int \frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y^2}\right) + \int \frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y}\right),$$

so dass gilt

$$2\int \frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y}\right) + \int \frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y^2}\right) + \int \frac{1}{z}\left(\frac{1}{y^3}\right) = 2\int \frac{1}{z^2} \cdot \int \frac{1}{z^2} + \int \frac{1}{z^3} \cdot \int \frac{1}{z} - \frac{1}{z^4}.$$

Aus der ersten Methode hat man aber

$$\int \frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y}\right) + \int \frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y^2}\right) = 2\int \frac{1}{z^2} \cdot \int \frac{1}{z^2} - 2\int \frac{1}{z^4}.$$

Im anderen Fall ist $m = 2$ und $n = 2$, woher erschlossen wird

$$\int \frac{1}{z^2} \cdot \int \frac{1}{z^2} - \int \frac{1}{z^4} = 2\int \frac{1}{z^2} \cdot \int \frac{1}{z^2} - \int \frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y^2}\right) - 2\int \frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y}\right)$$
$$+ 2\int \frac{1}{z^2} \cdot \int \frac{1}{z^2} - \int \frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y^2}\right) - 2\int \frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y}\right)$$

und daher weiter

$$2\int \frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y^2}\right) + 4\int \frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y}\right) = 3\int \frac{1}{z^2} \cdot \int \frac{1}{z^2} + \int \frac{1}{z^4}.$$

Aber die erste Methode gibt

$$2\int \frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y^2}\right) = \int \frac{1}{z^2} \cdot \int \frac{1}{z^2} + \int \frac{1}{z^4},$$

woher wir schließen, dass sein wird

$$\int \frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y^2}\right) = \frac{1}{2}\int \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{z^4}$$

und

$$\int \frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{2}\int \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{z^2}.$$

Die obere Schlussfolgerung verschafft aber

$$\int \frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{3}{2}\int \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{z^2} - \frac{5}{2}\int \frac{1}{z^4},$$

welche sogar mit der Wahrheit verträglich ist, weil gilt $\int \frac{1}{z^2} \cdot \int \frac{1}{z^2} = \frac{\pi^4}{36}$ und $\int \frac{1}{z^4} = \frac{\pi^4}{90}$, so dass auch der erste Teil, weil keine Unendlichkeit im Wege steht, zur Wahrheit führt, weil er nur dann vom wahren Wert abzuweichen scheint, wann immer das Quadrat der Unendlichkeit $\int \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z}$, wie es in der ersten Ordnung passiert, in die Rechnung eingeht; dadurch selbst wird die aus der ersten Ordnung abgeleitete Schlussfolgerung schon nicht unwesentlich bestätigt.

Fünfte Ordnung, in der $m + n = 5$ ist

§14. Es sei zuerst $m = 4$ und $n = 1$, woher für

$$\int \frac{1}{z^4} \cdot \int \frac{1}{z} - \int \frac{1}{z^5}$$

dieser Ausdruck hervorgeht

$$2\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^2}-\int\frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{y}\right)-2\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^3}-2\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z}$$
$$+\int\frac{1}{z}\left(\frac{1}{y^4}\right)+\int\frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y^3}\right)+\int\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y^2}\right)+\int\frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{y}\right),$$

woher wir erschließen

$$\int\frac{1}{z}\left(\frac{1}{y^4}\right)+\int\frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y^3}\right)+\int\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y^2}\right)=\int\frac{1}{z^4}\cdot\frac{1}{z}+2\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^3}-\int\frac{1}{z^5}.$$

Aber die erste Methode gibt

$$\int\frac{1}{z}\left(\frac{1}{y^4}\right)+\int\frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{y}\right)=\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z}+\int\frac{1}{z^5},$$

nach Abziehen welcher Gleichheit von jener zurückbleibt

$$\int\frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y^3}\right)+\int\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y^2}\right)-\int\frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{y}\right)=2\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^3}-2\int\frac{1}{z^5}.$$

Zweitens sei aber $m=3$ und $n=2$ und für

$$\int\frac{1}{z^3}\cdot\frac{1}{z^2}-\int\frac{1}{z^5}$$

wird aufgefunden

$$-6\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z}+\int\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y^2}\right)+3\int\frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{y}\right)+2\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^3}$$
$$+6\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z}-\int\frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y^3}\right)-2\int\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y^2}\right)-3\int\frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{y}\right)$$

und daher

$$\int\frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y^3}\right)+\int\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y^2}\right)=\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^3}+\int\frac{1}{z^5},$$

genauso wie die erste Methode liefert; daher wird also

$$\int\frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{y}\right)=3\int\frac{1}{z^5}-\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^3}.$$

Daher werden aber nicht einzeln die Summen der Reihen $\int \frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y^3}\right)$ und $\int \frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y^2}\right)$ nicht bestimmt. Unten [§30.] werden wir aber zeigen, dass gilt

$$\int \frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y^2}\right) = 3\int \frac{1}{z^2}\cdot\int \frac{1}{z^3} - \frac{9}{2}\int \frac{1}{z^5}$$

und

$$\int \frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y^3}\right) = -2\int \frac{1}{z^2}\cdot\int \frac{1}{z^3} + \frac{11}{2}\int \frac{1}{z^5}.$$

FÜNFTE ORDNUNG, IN DER $m+n=6$ IST

§15. Es sei zuerst $m=5$ und $n=1$ und es wird gelten

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{z^5}\cdot\int \frac{1}{z} - \int \frac{1}{z^6} = \int \frac{1}{z^5}\left(\frac{1}{y}\right) - 2\int \frac{1}{z^2}\cdot\int \frac{1}{z^4} - 2\int \frac{1}{z^4}\cdot\int \frac{1}{z^2}\\ + \int \frac{1}{z}\left(\int \frac{1}{y^5}\right) + \int \frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y^4}\right) + \int \frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y^3}\right)\\ + \int \frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{y^2}\right) + \int \frac{1}{z^5}\left(\frac{1}{y}\right),\end{aligned}$$

woher wird

$$\begin{aligned}&\int \frac{1}{z}\left(\frac{1}{y^5}\right) + \int \frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y^4}\right) + \int \frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y^3}\right) + \int \frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{y^2}\right) + 2\int \frac{1}{z^5}\left(\frac{1}{y}\right)\\ &= \int \frac{1}{z^5}\cdot\int \frac{1}{z} + 4\int \frac{1}{z^4}\cdot\int \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^6}.\end{aligned}$$

Weil aber die erste Methode gibt

$$\int \frac{1}{z}\left(\frac{1}{y^5}\right) + \int \frac{1}{z^5}\left(\frac{1}{y}\right) = \int \frac{1}{z^5}\cdot\int \frac{1}{z} + \int \frac{1}{z^6},$$

wird daher durch Herausstoßen der unendlichen Terme

$$\int \frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y^4}\right) + \int \frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y^3}\right) + \int \frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{y^2}\right) + \int \frac{1}{z^5}\left(\frac{1}{y}\right) = 4\int \frac{1}{z^4}\cdot\int \frac{1}{z^2} - 2\int \frac{1}{z^6}.$$

Als zweites werde genommen $m=4$ und $n=2$ und es wird sein

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{z^4}\cdot\int \frac{1}{z^2} - \int \frac{1}{z^6} = 2\int \frac{1}{z^4}\cdot\int \frac{1}{z^2} - \int \frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{y^2}\right) - 4\int \frac{1}{z^5}\left(\frac{1}{y}\right) + 2\int \frac{1}{z^2}\cdot\int \frac{1}{z^4}\\ + 6\int \frac{1}{z^4}\cdot\int \frac{1}{z^2} - \int \frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y^4}\right) - 2\int \frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y^3}\right) - 3\int \frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{y^2}\right)\\ - 4\int \frac{1}{z^5}\left(\frac{1}{y}\right)\end{aligned}$$

oder

$$\int \frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y^4}\right) + 2\int \frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y^3}\right) + 4\int \frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{y^2}\right) + 8\int \frac{1}{z^5}\left(\frac{1}{y}\right) = 9\int \frac{1}{z^4}\cdot\int \frac{1}{z^2} + \int \frac{1}{z^6}.$$

Es sei drittens $m = 3$ und $n = 3$, und weil die beiden Teile gleich werden, wird man haben

$$\int \frac{1}{z^3}\cdot\int \frac{1}{z^3} - \int \frac{1}{z^6} = -12\int \frac{1}{z^4}\cdot\int \frac{1}{z^2} + 2\int \frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y^3}\right) + 6\int \frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{y^2}\right) + 12\int \frac{1}{z^5}\left(\frac{1}{y}\right)$$

oder

$$2\int \frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y^3}\right) + 6\int \frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{y^2}\right) + 12\int \frac{1}{z^5}\left(\frac{1}{y}\right) = 12\int \frac{1}{z^4}\cdot\int \frac{1}{z^2} + \int \frac{1}{z^3}\cdot\int \frac{1}{z^3} - \int \frac{1}{z^6}.$$

Mit diesen wurden diese zwei aus der ersten Methode entspringenden verbunden

$$\int \frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y^4}\right) + \int \frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{y^2}\right) = \int \frac{1}{z^4}\cdot\int \frac{1}{z^2} + \int \frac{1}{z^6}$$

und

$$2\int \frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y^3}\right) = \int \frac{1}{z^3}\cdot\int \frac{1}{z^3} + \int \frac{1}{z^6}$$

und daher werden die einzelnen Reihen unterer Form so bestimmt:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{z^5}\left(\frac{1}{y}\right) &= 3\int \frac{1}{z^4}\cdot\frac{1}{z^2} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{z^3}\cdot\int \frac{1}{z^3} - \frac{7}{2}\int \frac{1}{z^6},\\
\int \frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{y^2}\right) &= -\frac{16}{3}\int \frac{1}{z^4}\cdot\int \frac{1}{z^2} + \int \frac{1}{z^3}\cdot\int \frac{1}{z^3} + 9\int \frac{1}{z^6},\\
\int \frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y^3}\right) &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{z^3}\cdot\int \frac{1}{z^3} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{z^6},\\
\int \frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y^4}\right) &= \frac{19}{3}\int \frac{1}{z^4}\cdot\int \frac{1}{z^2} - \int \frac{1}{z^3}\cdot\frac{1}{z^3} - 8\int \frac{1}{z^6},
\end{aligned}$$

dann wird aber unter Verwendung der zuerst gefunden Gleichung erhalten

$$\int \frac{1}{z^6} = \frac{4}{7}\int \frac{1}{z^4}\cdot\int \frac{1}{z^2},$$

was wegen $\int \frac{1}{z^2} = \frac{\pi\pi}{6}$, $\int \frac{1}{z^4} = \frac{\pi^4}{90}$ und $\int \frac{1}{z^6} = \frac{\pi^6}{945}$ mit der Wahrheit verträglich ist.

Sechste Ordnung, in welcher $m+n=7$ ist

§16. Es sei zuerst $m=6$ und $n=1$ und es wird sein

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{z^6}\cdot\int\frac{1}{z}-\int\frac{1}{z^7}=2\int\frac{1}{z^6}\cdot\int\frac{1}{z}-\int\frac{1}{z^6}\left(\frac{1}{y}\right)-2\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^5}-2\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^3}\\
-2\int\frac{1}{z^6}\cdot\int\frac{1}{z}+\int\frac{1}{z}\left(\frac{1}{y^6}\right)+\int\frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y^5}\right)+\int\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y^4}\right)\\
+\int\frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{y^3}\right)+\int\frac{1}{z^5}\left(\frac{1}{y^2}\right)+\int\frac{1}{z^6}\left(\frac{1}{y}\right),\end{aligned}$$

woher wir diese Gleichung erschließen

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{z}\left(\frac{1}{y^6}\right)+\int\frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y^5}\right)+\int\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y^4}\right)+\int\frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{y^3}\right)+\int\frac{1}{z^5}\left(\frac{1}{y^2}\right)\\
=\int\frac{1}{z^6}\cdot\int\frac{1}{z}+2\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^5}+2\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^3}-\int\frac{1}{z^7}.\end{aligned}$$

Weil aber ist

$$\int\frac{1}{z}\left(\frac{1}{y^6}\right)+\int\frac{1}{z^6}\left(\frac{1}{y}\right)=\int\frac{1}{z^6}\cdot\int\frac{1}{z}+\int\frac{1}{z^7},$$

wird gelten

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y^5}\right)+\int\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y^4}\right)+\int\frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{y^3}\right)+\int\frac{1}{z^5}\left(\frac{1}{y^2}\right)-\int\frac{1}{z^6}\left(\frac{1}{y}\right)\\
=2\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^5}+2\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^3}-2\int\frac{1}{z^7}.\end{aligned}$$

Es ist aber auch

$$\int\frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y^5}\right)+\int\frac{1}{z^5}\left(\frac{1}{y^2}\right)=\int\frac{1}{z^5}\cdot\int\frac{1}{z^2}+\int\frac{1}{z^7}$$

und

$$\int\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y^4}\right)+\int\frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{y^3}\right)=\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^3}+\int\frac{1}{z^7},$$

woher man haben wird

$$\int\frac{1}{z^6}\left(\frac{1}{y}\right)=4\int\frac{1}{z^7}-\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^5}-\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^3}.$$

Es sei zweitens $m = 5$ und $n = 2$ und es wird sein

$$\int \frac{1}{z^5} \cdot \int \frac{1}{z^2} - \int \frac{1}{z^7} = -10 \int \frac{1}{z^6} \cdot \int \frac{1}{z} + \int \frac{1}{z^5} \left(\frac{1}{y^2}\right) + 5 \int \frac{1}{z^6} \left(\frac{1}{y}\right)$$
$$+ 2 \int \frac{1}{z^2} \cdot \int \frac{1}{z^5} + 6 \int \frac{1}{z^4} \cdot \int \frac{1}{z^3} + 10 \int \frac{1}{z^6} \cdot \int \frac{1}{z}$$
$$- \int \frac{1}{z^2} \left(\frac{1}{y^5}\right) - 2 \int \frac{1}{z^3} \left(\frac{1}{y^4}\right) - 3 \int \frac{1}{z^4} \left(\frac{1}{y^3}\right)$$
$$- 4 \int \frac{1}{z^5} \left(\frac{1}{y^2}\right) - 5 \int \frac{1}{z^6} \left(\frac{1}{y}\right),$$

woher diese Gleichung erschlossen wird

$$\int \frac{1}{z^2} \left(\frac{1}{y^5}\right) + 2 \int \frac{1}{z^3} \left(\frac{1}{y^4}\right) + 3 \int \frac{1}{z^4} \left(\frac{1}{y^3}\right) + 3 \int \frac{1}{z^5} \left(\frac{1}{y^2}\right)$$
$$= \int \frac{1}{z^2} \cdot \int \frac{1}{z^5} + 6 \int \frac{1}{z^4} \cdot \int \frac{1}{z^3} + \int \frac{1}{z^7},$$

welche durch die aus der zuerst erwähnten auf diese zurückgeführt wird

$$\int \frac{1}{z^4} \left(\frac{1}{y^3}\right) + 2 \int \frac{1}{z^5} \left(\frac{1}{y^2}\right) = 4 \int \frac{1}{z^4} \cdot \int \frac{1}{z^3} - 2 \int \frac{1}{z^7}.$$

Es sei drittens $m = 4$ und $n = 3$; es wird sein

$$\int \frac{1}{z^4} \cdot \int \frac{1}{z^3} - \int \frac{1}{z^7} = 2 \int \frac{1}{z^4} \cdot \int \frac{1}{z^3} + 20 \int \frac{1}{z^6} \cdot \int \frac{1}{z} - \int \frac{1}{z^4} \left(\frac{1}{y^3}\right) - 4 \int \frac{1}{z^5} \left(\frac{1}{y^2}\right)$$
$$- 10 \int \frac{1}{z^6} \left(\frac{1}{y}\right) - 6 \int \frac{1}{z^4} \cdot \int \frac{1}{z^3} - 20 \int \frac{1}{z^6} \cdot \int \frac{1}{z} + \int \frac{1}{z^3} \left(\frac{1}{y^4}\right)$$
$$+ 3 \int \frac{1}{z^4} \left(\frac{1}{y^3}\right) + 6 \int \frac{1}{z^5} \left(\frac{1}{y^2}\right) + 10 \int \frac{1}{z^6} \left(\frac{1}{y}\right).$$

daher wird erschlossen

$$\int \frac{1}{z^3} \left(\frac{1}{y^4}\right) + 2 \int \frac{1}{z^4} \left(\frac{1}{y^3}\right) + 2 \int \frac{1}{z^5} \left(\frac{1}{y^2}\right) = 5 \int \frac{1}{z^4} \cdot \int \frac{1}{z^3} - \int \frac{1}{z^7}$$

oder

$$\int \frac{1}{z^4} \left(\frac{1}{y^3}\right) + 2 \int \frac{1}{z^5} \left(\frac{1}{y^2}\right) = 4 \int \frac{1}{z^4} \cdot \int \frac{1}{z^3} - 2 \int \frac{1}{z^7},$$

welche mit der zuvor gefundenen übereinstimmt, so dass daher nichts Neues gefolgert werden kann. Daher wird also nun zuerst die Summe dieser Reihe $\int \frac{1}{z^6} \left(\frac{1}{y}\right)$ bestimmt, dann aber diese zwei zusammen $\int \frac{1}{z^4} \left(\frac{1}{y^3}\right) + 2 \int \frac{1}{z^5} \left(\frac{1}{y^2}\right)$; wenn aber jede der beiden einzeln bekannt werden würde, dann würden auch die zwei übrigen $\int \frac{1}{z^3} \left(\frac{1}{y^4}\right)$ und $\int \frac{1}{z^2} \left(\frac{1}{y^5}\right)$ bekannt werden.

Siebte Ordnung, in der $m + n = 8$ ist

§17. Es sei zuerst $m = 7$ und $n = 1$; es wird sein

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{z^7} \cdot \int \frac{1}{z} - \int \frac{1}{z^8} = \int \frac{1}{z^7}\left(\frac{1}{y}\right) - 2\int \frac{1}{z^2} \cdot \int \frac{1}{z^6} - 2\int \frac{1}{z^4} \cdot \int \frac{1}{z^4} - 2\int \frac{1}{z^6} \cdot \int \frac{1}{z^2} \\ + \int \frac{1}{z}\left(\frac{1}{y^7}\right) + \int \frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y^6}\right) + \int \frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y^5}\right) + \int \frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{y^4}\right) \\ + \int \frac{1}{z^5}\left(\frac{1}{y^3}\right) + \int \frac{1}{z^6}\left(\frac{1}{y^2}\right) + \int \frac{1}{z^7}\left(\frac{1}{y}\right),\end{aligned}$$

welche letzte Zeile übergeht in

$$\int \frac{1}{z} \cdot \int \frac{1}{z^7} + \int \frac{1}{z^2} \cdot \int \frac{1}{z^6} + \int \frac{1}{z^3} \cdot \int \frac{1}{z^5} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{z^4} \cdot \int \frac{1}{z^4} + \frac{7}{2}\int \frac{1}{z^8}$$

und es wird sein

$$\int \frac{1}{z^7}\left(\frac{1}{y}\right) = 3\int \frac{1}{z^2} \cdot \int \frac{1}{z^6} - \int \frac{1}{z^3} \cdot \int \frac{1}{z^5} + \frac{3}{2}\int \frac{1}{z^4} \cdot \int \frac{1}{z^4} - \frac{9}{2}\int \frac{1}{z^8}.$$

Zweitens sei $m = 6$ und $n = 2$; es wird sein

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{z^6} \cdot \int \frac{1}{z^2} \int \frac{1}{z^8} = 2\int \frac{1}{z^6} \cdot \int \frac{1}{z^2} - \int \frac{1}{z^6}\left(\frac{1}{y^2}\right) - 6\int \frac{1}{z^7}\left(\frac{1}{y}\right) + 2\int \frac{1}{z^2} \cdot \int \frac{1}{z^6} \\ + 6\int \frac{1}{z^4} \cdot \int \frac{1}{z^4} + 10\int \frac{1}{z^6} \cdot \int \frac{1}{z^2} - \int \frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y^6}\right) - 2\int \frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y^5}\right) \\ - 3\int \frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{y^4}\right) - 4\int \frac{1}{z^5}\left(\frac{1}{y^3}\right) - 5\int \frac{1}{z^6}\left(\frac{1}{y^2}\right) - 6\int \frac{1}{z^7}\left(\frac{1}{y}\right)\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y^6}\right) + 2\int \frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y^5}\right) + 3\int \frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{y^4}\right) + 4\int \frac{1}{z^5}\left(\frac{1}{y^3}\right) + 6\int \frac{1}{z^6}\left(\frac{1}{y^2}\right) \\ + 12\int \frac{1}{z^7}\left(\frac{1}{y}\right) = 13\int \frac{1}{z^6} \cdot \int \frac{1}{z^2} + \int \frac{1}{z^8} + 6\int \frac{1}{z^4} \cdot \int \frac{1}{z^4},\end{aligned}$$

welche auf diese zurückgeführt wird

$$\begin{aligned}2\int \frac{1}{z^5}\left(\frac{1}{y^3}\right) + 5\int \frac{1}{z^6}\left(\frac{1}{y^2}\right) + 12\int \frac{1}{z^7}\left(\frac{1}{y}\right) \\ = 12\int \frac{1}{z^6} \cdot \int \frac{1}{z^2} - 2\int \frac{1}{z^3} \cdot \int \frac{1}{z^5} + \frac{9}{2}\int \frac{1}{z^4} \cdot \int \frac{1}{z^4} - \frac{7}{2}\int \frac{1}{z^8}.\end{aligned}$$

Es sei drittens $m = 5$ und $n = 3$; es wird sein

$$\int \frac{1}{z^5} \cdot \int \frac{1}{z^3} - \int \frac{1}{z^8} = -10 \int \frac{1}{z^6} \cdot \int \frac{1}{z^2} + \int \frac{1}{z^5} \left(\frac{1}{y^3}\right) + 5 \int \frac{1}{z^6} \left(\frac{1}{y^2}\right) + 15 \int \frac{1}{z^7} \left(\frac{1}{y}\right)$$
$$- 6 \int \frac{1}{z^4} \cdot \int \frac{1}{z^4} - 20 \int \frac{1}{z^6} \cdot \int \frac{1}{z^2} + \int \frac{1}{z^3} \left(\frac{1}{y^5}\right) + 3 \int \frac{1}{z^4} \left(\frac{1}{y^4}\right)$$
$$+ 6 \int \frac{1}{z^5} \left(\frac{1}{y^3}\right) + 10 \int \frac{1}{z^6} \left(\frac{1}{y^2}\right) + 15 \int \frac{1}{z^7} \left(\frac{1}{y}\right),$$

woher wird

$$\int \frac{1}{z^3} \left(\frac{1}{y^5}\right) + 3 \int \frac{1}{z^4} \left(\frac{1}{y^4}\right) + 7 \int \frac{1}{z^5} \left(\frac{1}{y^3}\right) + 15 \int \frac{1}{z^6} \left(\frac{1}{y^2}\right) + 30 \int \frac{1}{z^7} \left(\frac{1}{y}\right)$$
$$= 30 \int \frac{1}{z^6} \cdot \int \frac{1}{z^2} + \int \frac{1}{z^5} \cdot \int \frac{1}{z^3} + 6 \int \frac{1}{z^4} \cdot \int \frac{1}{z^4} - \int \frac{1}{z^8}$$

oder

$$6 \int \frac{1}{z^5} \left(\frac{1}{y^3}\right) + 15 \int \frac{1}{z^6} \left(\frac{1}{y^2}\right) + 30 \int \frac{1}{z^7} \left(\frac{1}{y}\right)$$
$$= 30 \int \frac{1}{z^6} \cdot \int \frac{1}{z^2} + \frac{9}{2} \int \frac{1}{z^4} \cdot \int \frac{1}{z^4} - \frac{7}{2} \int \frac{1}{z^8}.$$

Es sei schließlich $m = 4$ und $n = 4$ und es wird gelten

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{z^4} \cdot \int \frac{1}{z^4} - \frac{1}{2} \int \frac{1}{z^8} = 2 \int \frac{1}{z^4} \cdot \int \frac{1}{z^4} + 20 \int \frac{1}{z^6} \cdot \int \frac{1}{z^2} - \int \frac{1}{z^4} \left(\frac{1}{y^4}\right)$$
$$- 4 \int \frac{1}{z^5} \left(\frac{1}{y^3}\right) - 10 \int \frac{1}{z^6} \left(\frac{1}{y^2}\right) - 20 \int \frac{1}{z^7} \left(\frac{1}{y}\right)$$

und daher

$$4 \int \frac{1}{z^5} \left(\frac{1}{y^3}\right) + 10 \int \frac{1}{z^6} \left(\frac{1}{y^2}\right) + 20 \int \frac{1}{z^7} \left(\frac{1}{y}\right) = 20 \int \frac{1}{z^6} \cdot \int \frac{1}{z^2} + \int \frac{1}{z^4} \cdot \int \frac{1}{z^4},$$

welche Gleichung mit der vorhergehenden dieselbe Bestimmung enthält und auf diese Eigenschaft reduziert wird

$$6 \int \frac{1}{z^4} \cdot \int \frac{1}{z^4} = 7 \int \frac{1}{z^8},$$

welche mit den von mir gefunden Werten $\int \frac{1}{z^4} = \frac{\pi^4}{90}$ und $\int \frac{1}{z^8} = \frac{\pi^8}{9450}$ überaus konform ist. Wenn aber diese letzte Gleichung mit dem zweiten Fall verglichen wird, wird daher erschlossen

$$4 \int \frac{1}{z^7} \left(\frac{1}{y}\right) = 4 \int \frac{1}{z^2} \cdot \int \frac{1}{z^6} - 4 \int \frac{1}{z^3} \cdot \int \frac{1}{z^5} + 8 \int \frac{1}{z^4} \cdot \int \frac{1}{z^4} - 7 \int \frac{1}{z^8}$$

oder

$$\int \frac{1}{z^7}\left(\frac{1}{y}\right) = \int \frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^6} - \int\frac{1}{z^3}\cdot\int\frac{1}{z^5} + \frac{1}{2}\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^4},$$

welcher Wert mit dem ersten Fall verglichen liefert

$$2\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^6} + \int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^4} = \frac{9}{2}\int\frac{1}{z^8},$$

welche Gleichung auch mit der Wahrheit verträglich ist. Daher erlangen wir außer der Reihe $\int \frac{1}{z^7}\left(\frac{1}{y}\right)$ und den Bestimmungen der ersten Methode nur diese eine neue Bestimmung

$$2\int\frac{1}{z^5}\left(\frac{1}{y^3}\right) + 5\int\frac{1}{z^6}\left(\frac{1}{y^2}\right) = 10\int\frac{1}{z^3}\cdot\int\frac{1}{z^5} - \frac{9}{2}\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^4}$$

und daher lassen sich also die Summen dieser Reihen $\int \frac{1}{z^5}\left(\frac{1}{y^3}\right)$ und $\int \frac{1}{z^6}\left(\frac{1}{y^2}\right)$ nicht einzeln bestimmen.

Achte Ordnung, in welcher $m + n = 9$ ist

§18. Für diese Ordnung gibt die erste Methode diese Gleichungen

$$\int\frac{1}{z}\left(\frac{1}{y^8}\right) + \int\frac{1}{z^8}\left(\frac{1}{y}\right) = \int\frac{1}{z}\cdot\int\frac{1}{z^8} + \int\frac{1}{z^9},$$

$$\int\frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y^7}\right) + \int\frac{1}{z^7}\left(\frac{1}{y^2}\right) = \int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^7} + \int\frac{1}{z^9},$$

$$\int\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y^6}\right) + \int\frac{1}{z^6}\left(\frac{1}{y^3}\right) = \int\frac{1}{z^3}\cdot\int\frac{1}{z^6} + \int\frac{1}{z^9},$$

$$\int\frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{y^5}\right) + \int\frac{1}{z^5}\left(\frac{1}{y^4}\right) = \int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^5} + \int\frac{1}{z^9}.$$

Die zweite Methode verschafft aber außerdem diese Bestimmungen

$$\int\frac{1}{z^8}\left(\frac{1}{y}\right) = 5\int\frac{1}{z^9} - \int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^7} - \int\frac{1}{z^3}\cdot\int\frac{1}{z^6} - \int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^5},$$

$$2\int\frac{1}{z^5}\left(\frac{1}{y^4}\right) + 5\int\frac{1}{z^6}\left(\frac{1}{y^3}\right) + 5\int\frac{1}{z^7}\left(\frac{1}{y^2}\right) = 10\int\frac{1}{z^3}\cdot\int\frac{1}{z^6},$$

$$\int\frac{1}{z^6}\left(\frac{1}{y^3}\right) + 3\int\frac{1}{z^7}\left(\frac{1}{y^2}\right) = 6\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^5} - 6\int\frac{1}{z^3}\cdot\int\frac{1}{z^6} - 10\int\frac{1}{z^9}.$$

Weil also in dieser Ordnung 8 Reihen der Form auftauchen, welche wir betrachten, reichen diese sieben Gleichungen nicht aus um alle zu bestimmen; wenn aber anderswoher außer der Reihe $\int \frac{1}{z^8}\left(\frac{1}{y}\right)$ eine einzige der übrigen summiert werden könnte, würden daher die Summen gänzlich aller bekannt werden.

NEUNTE ORDNUNG, IN WELCHER $m+n=10$ IST

§19. Aus der ersten Methode erlangen wir für diese Ordnung diese Gleichungen

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{z}\left(\frac{1}{y^9}\right) + \int \frac{1}{z^9}\left(\frac{1}{y}\right) &= \int \frac{1}{z} \cdot \int \frac{1}{z^9} + \int \frac{1}{z^{10}}, \\
\int \frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y^8}\right) + \int \frac{1}{z^8}\left(\frac{1}{y^2}\right) &= \int \frac{1}{z^2} \cdot \int \frac{1}{z^8} + \int \frac{1}{z^{10}}, \\
\int \frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y^7}\right) + \int \frac{1}{z^7}\left(\frac{1}{y^3}\right) &= \int \frac{1}{z^3} \cdot \int \frac{1}{z^7} + \int \frac{1}{z^{10}}, \\
\int \frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{y^6}\right) + \int \frac{1}{z^6}\left(\frac{1}{y^4}\right) &= \int \frac{1}{z^4} \cdot \int \frac{1}{z^6} + \int \frac{1}{z^{10}}, \\
\int \frac{1}{z^5}\left(\frac{1}{y^5}\right) &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{z^5} \cdot \int \frac{1}{z^5} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{z^{10}};
\end{aligned}
$$

weil ja also hier 9 Reihen auftauchen, gibt für deren Summation die zweite Methode zuerst

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{z^9}\left(\frac{1}{y}\right) =& 3\int \frac{1}{z^2} \cdot \int \frac{1}{z^8} - \int \frac{1}{z^3} \cdot \int \frac{1}{z^7} + 3\int \frac{1}{z^4} \cdot \int \frac{1}{z^6} \\
& - \frac{1}{2}\int \frac{1}{z^5} \cdot \int \frac{1}{z^5} - \frac{11}{2}\int \frac{1}{z^{10}},
\end{aligned}
$$

aber von den übrigen vier Gleichungen, die daher gebildet werden, bestimmen zwei nichts anderes außer einer bekannten Relation nach welcher gilt

$$\int \frac{1}{z^{10}} = \frac{10}{11}\int \frac{1}{z^4} \cdot \int \frac{1}{z^6},$$

aber die zwei übrigen liefern

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{z^6}\left(\frac{1}{y^4}\right) + \int \frac{1}{z^7}\left(\frac{1}{y^3}\right) &= 6\int \frac{1}{z^4}\cdot\int \frac{1}{z^6} - \int \frac{1}{z^5}\cdot\int \frac{1}{z^5} - \frac{7}{2}\int \frac{1}{z^{10}},\\
2\int \frac{1}{z^7}\left(\frac{1}{y^3}\right) + 7\int \frac{1}{z^8}\left(\frac{1}{y^2}\right) &= 14\int \frac{1}{z^3}\cdot\int \frac{1}{z^7} - 45\int \frac{1}{z^4}\cdot\int \frac{1}{z^6}\\
&\quad + 8\int \frac{1}{z^5}\cdot\int \frac{1}{z^5} + 33\int \frac{1}{z^{10}},
\end{aligned}$$

so dass noch eine Bestimmung fehlt, um alle Reihen dieser Ordnung zu summieren.

§20. Über die Bestimmungen welche diese zweite Methode verschafft, tauchen die folgenden zu bemerkenden Dinge auf: Erstens werden nur in der ersten, zweiten, dritten und fünften Ordnung alle Reihen unser Form bestimmt, in allen übrigen fehlt eine einzige Bestimmung, dass alle sich dorthin erstreckenden Reihen summiert werden können, so dass, wenn anderswoher eine solche Bestimmung dargereicht werden würde, die ganze Aufgabe erledigt werden könnte. Zweitens verdient auch für die Ordnungen, in denen $m+n$ eine gerade Zahl ist, besonders bemerkt zu werden, dass diese Methode dieselbe Relation zwischen den Summen der gerade Potenzen

$$\int \frac{1}{z^2}, \int \frac{1}{z^4}, \int \frac{1}{z^6}, \text{ etc.}$$

offen legt, die ich einst aus in höchstem Maße verschiedenen Prinzipien gefunden habe, obwohl dennoch hier die Quadratur des Kreises, von welcher diesen Summen abhängen, nicht berücksichtigt wird. Daher hätte es sich sogar erwarten lassen, dass für die Ordnungen, in denen $m+n$ eine ungerade Zahl ist, eine ähnliche Relation zwischen den Summen der ungeraden Potenzen hervorgehen muss, was sich aber weit anders verhält, weil gewisse der Bestimmungen, die für diese Ordnungen aufgefunden werden, gänzlich miteinander übereinstimmen, dass daher vollkommen nichts gefolgert werden kann. Weil dies wider jeder Erwartung passiert ist, ist dieser Mangel einer vollständigen Bestimmung der ganzen Aufmerksamkeit würdig anzusehen.

§21. Drittens ist zu bemerken, dass in allen Ordnungen eine einzige Reihe unserer Form immer vollständig bestimmt wird, diese nämlich, die mit der Formel $\int \frac{1}{z^{m+n-1}}\left(\frac{1}{y}\right)$ angezeigt wird; weil aber ihre Bestimmungen, je nachdem ob $m+n$ eine ungerade oder gerade Zahl war, einem anderen Gesetz folgen, wollen wir diese hier getrennt vor Augen führen.

Für Ordnungen, in denen $m+n$ eine gerade Zahl ist

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y}\right) &= \frac{3}{2}\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^2}-\frac{5}{2}\int\frac{1}{z^4},\\
\int \frac{1}{z^5}\left(\frac{1}{y}\right) &= 3\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^4}-\frac{1}{2}\int\frac{1}{z^3}\cdot\int\frac{1}{z^3}-\frac{7}{2}\int\frac{1}{z^6},\\
\int \frac{1}{z^7}\left(\frac{1}{y}\right) &= 3\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^6}-\int\frac{1}{z^3}\cdot\frac{1}{z^5}+\frac{3}{2}\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^4}-\frac{9}{2}\int\frac{1}{z^8},\\
\int \frac{1}{z^9}\left(\frac{1}{y}\right) &= 3\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^8}-\int\frac{1}{z^3}\cdot\int\frac{1}{z^7}+3\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^6}-\frac{1}{2}\int\frac{1}{z^5}\cdot\int\frac{1}{z^5}\\
&\quad -\frac{11}{2}\int\frac{1}{z^{10}}\\
\int \frac{1}{z^{11}}\left(\frac{1}{y}\right) &= 3\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^{10}}-\int\frac{1}{z^3}\cdot\int\frac{1}{z^9}+3\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^8}-\int\frac{1}{z^5}\cdot\int\frac{1}{z^7}\\
&\quad +\frac{3}{2}\int\frac{1}{z^6}\cdot\int\frac{1}{z^6}-\frac{13}{2}\int\frac{1}{z^{12}},
\end{aligned}$$

etc.,

welche Ausdrücke so auf die Gradheit der Zahlen m und n beschränkt sind, dass sie durch Interpolation auch auf die ungeraden übertragen werden können.

Für Ordnungen, in deren $m+n$ eine ungerade Zahl ist

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y}\right) &= 2\int\frac{1}{z^3},\\
\int \frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{y}\right) &= 3\int\frac{1}{z^5}-\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^3},\\
\int \frac{1}{z^6}\left(\frac{1}{y}\right) &= 4\int\frac{1}{z^7}-\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^5}-\int\frac{1}{z^3}\cdot\int\frac{1}{z^4},\\
\int \frac{1}{z^8}\left(\frac{1}{y}\right) &= 5\int\frac{1}{z^9}-\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^7}-\int\frac{1}{z^3}\cdot\int\frac{1}{z^6}-\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^5},\\
\int \frac{1}{z^{10}}\left(\frac{1}{y}\right) &= 6\int\frac{1}{z^{11}}-\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^9}-\int\frac{1}{z^3}\cdot\int\frac{1}{z^8}-\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^7}-\int\frac{1}{z^5}\cdot\int\frac{1}{z^6},
\end{aligned}$$

etc.

Hier steht aber nichts im Wege, dass diese Ausdrücke auch auf die geraden Ordnungen übertragen werden.

§22. Nachdem aber die Interpolation in herkömmlicher Weise durchgeführt worden ist, werden sich diese Summationen für alle Ordnungen so verhalten:

$$2\int\frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y}\right)=4\int\frac{1}{z^3},$$
$$2\int\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y}\right)=5\int\frac{1}{z^4}-\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^2},$$
$$2\int\frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{y}\right)=6\int\frac{1}{z^5}-2\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^3},$$
$$2\int\frac{1}{z^5}\left(\frac{1}{y}\right)=7\int\frac{1}{z^6}-2\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^4}-\int\frac{1}{z^3}\cdot\int\frac{1}{z^3},$$
$$2\int\frac{1}{z^6}\left(\frac{1}{y}\right)=8\int\frac{1}{z^7}-2\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^5}-2\int\frac{1}{z^3}\cdot\int\frac{1}{z^4},$$
$$2\int\frac{1}{z^7}\left(\frac{1}{y}\right)=9\int\frac{1}{z^8}-2\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^6}-2\int\frac{1}{z^3}\cdot\int\frac{1}{z^5}-\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^4},$$
$$2\int\frac{1}{z^8}\left(\frac{1}{y}\right)=10\int\frac{1}{z^9}-2\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^7}-2\int\frac{1}{z^3}\cdot\int\frac{1}{z^6}-2\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^5},$$
$$2\int\frac{1}{z^9}\left(\frac{1}{y}\right)=11\int\frac{1}{z^{10}}-2\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^8}-2\int\frac{1}{z^3}\cdot\int\frac{1}{z^7}-2\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^6}-\int\frac{1}{z^5}\cdot\int\frac{1}{z^5},$$

etc.,

woher im Allgemeinen, wenn $m+n=\lambda$ gesetzt wird, sein wird

$$2\int\frac{1}{z^{\lambda-1}}\left(\frac{1}{y}\right)=(\lambda+1)\int\frac{1}{z^\lambda}-\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^{\lambda-2}}-\int\frac{1}{z^3}\cdot\int\frac{1}{z^{\lambda-3}}-\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^{\lambda-4}}$$
$$-\ldots-\int\frac{1}{z^{\lambda-2}}\cdot\int\frac{1}{z^2}.$$

§23. Bis dass aber dieser Ausdruck in Zweifel gestellt werden kann, werden diese Ausdrücke für die geraden Ordnungen mit den zuvor dargebotenen verglichen und daher werden die folgenden Relationen erhalten werden:

$$
\begin{aligned}
5\int\frac{1}{z^4} &= 2\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^2},\\
7\int\frac{1}{z^6} &= 4\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^4},\\
9\int\frac{1}{z^8} &= 4\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^6}+2\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^4},\\
11\int\frac{1}{z^{10}} &= 4\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^8}+4\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^6},\\
13\int\frac{1}{z^{12}} &= 4\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^{10}}+4\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^8}+2\int\frac{1}{z^6}\cdot\int\frac{1}{z^6},\\
&\text{etc.,}
\end{aligned}
$$

die mit denen, die ich einst gefunden habe, vollkommen im Einklang stehen. Wenn wir nämlich festlegen $\int\frac{1}{z^2}=\alpha\pi^2, \int\frac{1}{z^4}=\beta\pi^4, \int\frac{1}{z^6}=\gamma\pi^6, \int\frac{1}{z^8}=\delta\pi^8, \int\frac{1}{z^{10}}=\epsilon\pi^{10}$, etc., wird natürlich, so wie einst bewiesen habe, sein

$$
\begin{aligned}
5\beta &= 2\alpha\alpha,\\
7\gamma &= 4\alpha\beta,\\
9\delta &= 4\alpha\gamma+2\beta\beta,\\
11\epsilon &= 4\alpha\delta+4\beta\gamma,\\
13\zeta &= 4\alpha\epsilon+4\beta\delta+2\gamma\gamma,\\
15\eta &= 4\alpha\zeta+4\beta\epsilon+4\gamma\delta,\\
&\text{etc.}
\end{aligned}
$$

§24. Die erste Methode hatte nur für die geraden Ordnungen die Summe einer in unserer allgemeinen Form enthaltenen Reihe geliefert, die sich nach setzen $m+n=2\mu$ so verhielt

$$\int\frac{1}{z^\mu}\left(\frac{1}{y^\mu}\right)=\frac{1}{2}\int\frac{1}{z^\mu}\cdot\int\frac{1}{z^\mu}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{z^{2\mu}}.$$

Nun können wir aber mithilfe der zweiten Methode außerdem aus jeder Ordnung eine Reihe unserer Form summieren und in der Ordnung $m+n=6$ war es sogar möglich, alle diese Reihen zu summieren. Daher lässt sich vermuten, dass diese Summation auch bei allen Ordnungen gelingt, auch wenn die zweite Methode die Aufgabe nicht völlig erledigt; es muss aber angesehen, schon sehr viel geleistet worden zu sein, dass, wenn eine einzige Reihe außer den zwei erwähnten einer Ordnung woher auch immer summiert werden können, daher sofort die Summen aller übrigen erlangt werden. So verhält sich freilich die Sache in den hier entwickelten Ordnungen; aber wenn wir weiter fortschreiten, werden mehr Bestimmungen als eine zu fehlen entdeckt.

§25. Damit aber die Beschaffenheit der Gleichungen, welche die erste wie die zweite Methode für jede beliebige Ordnung verschafft, deutlicher erkannt wird, wollen wir unsere Formeln noch kürzer so darstellen, dass für irgendeine Ordnung $m+n=\lambda$ anstelle von $\int \frac{1}{z^\mu} \cdot \int \frac{1}{z^\nu}$ entweder p^μ oder p^ν geschrieben wird, welche zwei Formeln natürlich wegen $\mu+\nu=\lambda$ für gleichwertig zu halten sind. Und auf die gleiche Weise wurde für $\int \frac{1}{z^\lambda}\, p^\lambda$ geschrieben; dann werde aber anstelle der Formel $\int \frac{1}{z^\mu}\left(\frac{1}{y^\nu}\right)$ oder $\int \frac{1}{z^\mu}\left(\frac{1}{y^{\lambda-\mu}}\right)\, q^\mu$ geschrieben; und daher werden die Gleichungen der einzelnen Ordnungen klarer werden.

Für die Ordnung $m+n=3$

$$\begin{array}{r|l} q+q^2=p+p^3 & q+q^2=2p^2+p-p^3 \quad \text{oder} \quad q=p-p^3 \\ & \;\;-1\;\;-2 \end{array}$$

Für die Ordnung $m+n=4$

$$\begin{array}{r|l} q+q^3=p+p^4 & q+q^2+q^3=2p^2+p-p^4 \\ & \qquad\;\; +1 \\ 2q^2=p^2+p^4 & \;\; q^2+2q^3=2p^2-p^2+p^4 \\ & +1\;+2\quad+2 \end{array}$$

Für die Ordnung $m+n=5$

$$\begin{array}{r|l} q+q^4=p+p^5 & q+q^2+q^3+q^4=2p^3+2p^4+p-p^6 \\ & \qquad\qquad\quad -1 \qquad\quad -2 \\ q^2+q^3=p^2+p^5 & q^2+2q^3+3q^4=2p^2+6p^2-p^2+p^5 \\ & \quad\;\; -1\;\;\; -3 \qquad\quad\;\; -6 \end{array}$$

Für die Ordnung $m + n = 6$

$$
\begin{array}{r|c}
q + q^5 = p + p^6 & q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 = 2p^3 + 2p^4 + p - p^6 \\
 & +1 \\
q^2 + q^4 = p^2 + p^6 & q^2 + 2q^3 + 3q^4 + 4q^5 = 2p^2 + 6p^4 - p^2 + p^6 \\
 & +1 \quad +4 \qquad\qquad +2 \\
2q^3 = p^3 + p^6 & q^3 + 3q^4 + 6q^5 = 6p^4 + p^3 - p^6 \\
 & +1 \quad -3 \quad +6 \quad +6
\end{array}
$$

Für die Ordnung $m + n = 7$

$$
\begin{array}{r|c}
q + q^6 = p + p^7 & q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + q^6 = 2p^2 + 2p^4 + 2p^6 + p - p^7 \\
 & -1 \qquad\qquad -2 \\
q^2 + q^5 = p^2 + p^7 & q^2 + 2q^3 + 3q^4 + 4q^5 + 5q^6 = 2p^2 + 6p^4 + 10p^6 - p^2 + p^7 \\
 & -1 \quad -5 \qquad\qquad -10 \\
q^3 + q^4 = p^3 + p^7 & q^3 + 3q^4 + 5q^5 + 10q^6 = 6p^4 + 20p^6 + p^3 - p^7 \\
 & -1 \quad +4 \quad -10 \quad -2 \quad -20
\end{array}
$$

Für die Ordnung $m + n = 8$

$$
\begin{array}{r|c}
q + q^7 = p + p^8 & q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + q^6 + q^7 = 2p^2 + 2p^4 + 2p^6 + p - p^8 \\
 & +1 \\
q^2 + q^6 = p^2 + p^8 & q^2 + 2q^3 + 3q^4 + 4q^5 + 5q^6 + 6q^7 = 2p^2 + 6p^4 + 10p^6 - p^2 + p^8 \\
 & +1 \quad +6 \qquad\qquad +2 \\
q^3 + q^5 = p^3 + p^8 & q^3 + 3q^4 + 5q^5 + 10q^6 + 15q^7 = 6p^4 + 20p^6 + p^3 - p^8 \\
 & +1 \quad +5 \quad +15 \quad +10 \quad -20 \\
2q^4 = p^4 + p^8 & q^4 + 4q^5 + 10q^6 + 20q^7 = 2p^4 + 20p^6 - p^4 + p^8 \\
 & +1 \quad +4 \quad +10 \quad +20 \quad +2 \quad +20
\end{array}
$$

Auf diese Weise lasen sich also diese Gleichungen, so weit wie es beliebt, leicht fortsetzen.

DRITTE METHODE, ZU REIHEN DIESER ART ZU GELANGEN

§26. Diese Methode ist der vorhergehenden fast gleich; ich betrachte hier nämlich die Reihe

$$\int \frac{1}{z^n}\left(1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\ldots+\frac{1}{(z-1)^m}\right),$$

deren Wert auf die obere Weise ausgedrückt dieser ist

$$=\int \frac{1}{z^n}\left(\frac{1}{y^m}\right)-\int \frac{1}{z^{m+n}},$$

aber auf die im vorhergehenden Paragraphen benutzte Weise $= q^n - p^{m+n}$; über diese sei angemerkt, dass für die erste Methode gilt

$$q^m + q^n = p^m + p^{m+n} = p^n + p^{m+n}$$

wegen $p^m = p^n$. Nun ist jeder beliebige Term dieser Form

$$\frac{1}{z^n}\left(1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\ldots+\frac{1}{(z-1)^m}\right)$$

in dieser Form $\frac{1}{(x+a)^n x^m}$ enthalten, die, wie wir zuvor in §6 gesehen haben, in diese Teile aufgelöst werden kann

$$\frac{1}{a^n}\cdot\frac{1}{x^m}-\frac{n}{1\cdot a^{n+1}}\cdot\frac{1}{x^{m-1}}+\frac{n(n+1)}{1\cdot 2\cdot a^{n+2}}\cdot\frac{1}{x^{m-2}}-\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot a^{n+3}}\cdot\frac{1}{x^{m-3}}+\text{etc.}$$

und

$$\pm\frac{1}{a^m}\cdot\frac{1}{(x+a)^n}\pm\frac{m}{1\cdot a^{m+1}}\cdot\frac{1}{(x+a)^{n-1}}\pm\frac{m(m+1)}{1\cdot 2\cdot a^{m+2}}\cdot\frac{1}{(x+a)^{n-2}}\pm\text{etc.},$$

wo die oberen Vorzeichen der zweideutigen Vorzeichen gelten, wenn m eine gerade Zahl ist, die unteren hingegen, wenn m eine ungerade Zahl ist; dann muss aber jede der beiden Progressionen soweit fortgesetzt werden, bis schließlich in der oberen der Exponent des Faktors $\frac{1}{x}$, in der unteren hingegen der Exponent des Faktors $\frac{1}{x+a}$ die Einheit wird.

§27. Um also die Summe der vorgelegten Reihe zu erhalten, müssen in den einzelnen Termen der entwickelten Formel so anstelle von a wie anstelle von x alle in der natürlichen Reihenfolge fortschreitenden Zahlen von der Einheit bis hin zu Unendlich nacheinander geschrieben und alle daher herstammenden Terme zu einer Summe gesammelt werden. Dann wird aber für die Terme des oberen entwickelten Teils sein

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{a^n} \cdot \frac{1}{x^m} &= \int \frac{1}{z^n} \cdot \int \frac{1}{z^m} = p^n = p^m, \\
\int \frac{1}{a^{n+1}} \cdot \int \frac{1}{x^{m-1}} &= \int \frac{1}{z^{n+1}} \cdot \int \frac{1}{z^{m-1}} = p^{n+1} = p^{m-1}, \\
\int \frac{1}{a^{n+2}} \cdot \int \frac{1}{x^{m-2}} &= \int \frac{1}{z^{n+2}} \cdot \int \frac{1}{z^{m-2}} = p^{n+2} = p^{m-2}, \\
&\text{etc.},
\end{aligned}$$

aber für die Terme des unteren entwickelten Teils

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{(x+a)^n} &= \int \frac{1}{z^m} \cdot \int \frac{1}{z^n} - \int \frac{1}{z^m} \left(\frac{1}{y^n}\right) \\
&= p^m - q^m = p^m, \\
\int \frac{1}{a^{m+1}} \cdot \int \frac{1}{(x+a)^{n-1}} &= \int \frac{1}{z^{m+1}} \cdot \int \frac{1}{z^{n-1}} - \int \frac{1}{z^{m+1}} \left(\frac{1}{y^{n-1}}\right) \\
&= p^{m+1} - q^{m+1} = q^{n-1} - p^{m+n}, \\
\int \frac{1}{a^{m+2}} \cdot \int \frac{1}{(x+a)^{n-2}} &= \int \frac{1}{z^{m+2}} \cdot \int \frac{1}{z^{n-2}} - \int \frac{1}{z^{m+2}} \left(\frac{1}{y^{n-2}}\right) \\
&= p^{m+2} - q^{m+2} = q^{n-2} - p^{m+n}, \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Nachdem also diese eingesetzt worden sind, wird der Wert unserer Reihe, der $= q^n - p^{m+n}$ ist, in den folgenden Ausdruck entwickelt

$$\begin{aligned}
&p^m - \frac{n}{1}p^{m-1} + \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}p^{m-2} - \frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}p^{m-3} + \text{etc.} \\
&\pm q^n \pm \frac{m}{1}q^{n-1} \pm \frac{m(m+1)}{1\cdot 2}q^{n-2} \pm \frac{m(m+1)(m+2)}{1\cdot 2\cdot 3}q^{n-3} \pm \text{etc.} \\
&\mp p^{m+n} \mp \frac{m}{1}p^{m+n} \mp \frac{m(m+1)}{1\cdot 2}p^{m+n} \mp \frac{m(m+1)(m+2)}{1\cdot 2\cdot 3}p^{m+n} \mp \text{etc.}
\end{aligned}$$

Weil aber gilt $p^\mu = q^\mu + q^{m+n-\mu} - p^{m+n}$, werden wir haben

$$\begin{aligned}
0 =& q^m - \frac{n}{1}(q^{m-1} + q^{n+1}) + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}(q^{m-2} + q^{n+2}) - \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(q^{m-3} + q^{n+3}) \\
&+ \text{etc.} + \frac{n}{1}p^{m+n} - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}p^{m+n} + \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}p^{m+n} - \text{etc.} \pm q^n \pm \frac{m}{1}q^{n-1} \\
&\pm \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2}q^{n-2} \pm \frac{m(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}q^{n-3} \pm \text{etc.} \mp p^{m+n} \mp \frac{m}{1}p^{m+n} \\
&\mp \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2}p^{m+n} \mp \frac{m(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}p^{m+n} \mp \text{etc.}
\end{aligned}$$

§28. Bevor wir aber zu den pben betrachteten Reihen herabsteigen, wollen wir im Allgemeinen einige Fälle entwickeln.
I. Es sei also $m = 1$ und die gefundene Gleichung wird diese Form annehmen

$$0 = q - q^n - q^{n-1} - q^{n-2} - ... - q + np^{n+1}$$

oder

$$q^2 + q^3 + q^4 + ... + q^n = np^{n+1}$$

während der Exponent der Ordnung $n+1$ ist, so dass gilt $q^\mu + q^{n+1-\mu} = p^\mu + p^{n+1}$.
II. Es sei $m = 2$ und der Exponent der Ordnung $n+2$, dass ist $q^\mu + q^{n+2-\mu} = p^\mu + p^{n+2}$, und unsere Gleichung wird werden

$$\begin{aligned}
0 =& q^2 - n(q + q^{n+1}) + q^n + 2q^{n-1} + 3q^{n-2} + 4q^{n-3} + ... + nq \\
&+ np^{n+2} - \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}p^{n+2}
\end{aligned}$$

oder

$$q^n + 2q^{n-1} + 3q^{n-2} + ... + (n-1)q^2 + q - nq^{n+1} = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}p^{n+2}.$$

III. Es sei $m = 3$ und der Exponent der Ordnung $n+3$, dass gilt $q^\mu + q^{n+3-\mu} = p^\mu + p^{n+3}$, und unsere Gleichung wird sein

$$\begin{aligned}
0 =& q^3 - n(q^2 + q^{n+1}) + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}(q + q^{n+2}) - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}p^{n+3} - q^n - 3q^{n-1} \\
&- 6q^{n-2} - 10q^{n-3} - ... - \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}q + \frac{n)n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}pn + 3
\end{aligned}$$

oder

$$
\begin{aligned}
&q^n + 3q^{n-1} + 6q^{n-2} + \dots + \frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}q^3 + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}q^2 + nq^{n+1}\\
&\quad = \frac{n(nn+5)}{6}p^{n+3} - 1 + n - \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}q^{n+2}
\end{aligned}
$$

oder auf diese Weise geordneter

$$
\begin{aligned}
&q^n + 3q^{n-1} + 6q^{n-2} + \dots + \frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}q^3 + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}q^2 - q^3 + n(q^2 + q^{n+1})\\
&\quad - \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}q^{n+2} = \frac{n(nn+5)}{6}p^{n+3}.
\end{aligned}
$$

IV. Sei $m = 4$ und der Exponent der Ordnung $n+4$ und $q\mu + q^{n+4-\mu} = p^\mu + p^{n+4}$, und unsere Gleichung wird werden

$$
\begin{aligned}
0 =& q^4 - n(q^3 + q^{n+1}) + \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}(q^2 + q^{n+2}) - \frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}(q + q^{n+3})\\
&+ \frac{n(nn+5)}{1\cdot 2\cdot 3}p^{n+4} + q^n + 4q^{n-1} + 10q^{n-2} + 20q^{n-3} + \dots + \frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}q\\
&- \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}p^{n+4}
\end{aligned}
$$

oder

$$
\begin{aligned}
&q^n + 4q^{n-1} + 10q^{n-2} + \dots + \frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}q^2 = \frac{n(n-1)(nn+3n+14)}{24}p^{n+4}\\
&\quad + q^4 - n(q^3 + q^{n+1}) + \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}(q^2 + q^{n+2}) - \frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}q^{n+3}.
\end{aligned}
$$

§29. Wir wollen auch auf gleiche Weise gewisse Fälle für die Exponenten n entwickeln.

I. Es sei zuerst $n = 1$ und der Exponent der Ordnung $m+1$ und unsere Gleichung wird sein

$$
0 = q^m - q^{m-1} + q^{m-2} - q^{m-3} + \dots \mp q \left.\begin{matrix} +1 \\ +0 \end{matrix}\right\} p^{m+1} \pm q \mp p^{m+1} - q^2 + q^3 - q^4 \mp q^m,
$$

woher klar zutage tritt, wenn m eine gerade Zahl war, in welchem Fall die oberen Vorzeichen gelten, dass die ganze Gleichung eine identische sein wird; aber wenn m eine ungerade Zahl ist, wird man haben

$$
q^2 - q^3 + q^4 - q^5 + \dots - q^m = \frac{1}{2}p^{m+1}.
$$

II. Es sei $n = 2$ und der Exponent der Ordnung $m + 2$ und unsere Gleichung wird sein

$$0 = q^m - 2q^{m-1} + 3q^{m-2} - 4q^{m-3} + \mp mq \left.\begin{matrix} +\frac{1}{2}(m+2) \\ -\frac{1}{2}(m-1) \end{matrix}\right\} p^{m+2} - 2q^3 + 3q^4 - 4q^5$$
$$+ \ldots \mp mq^{m+1} \pm q^2 \pm mq \mp (m+1)p^{m+2},$$

wo die obere Zweideutigkeit für die geraden Werte von m gilt, die unteren für die ungeraden. Nun werden für die verschiedenen Werte von m haben: Zuerst für die geraden Werte

$$\begin{aligned}
m = 2: &\quad q^2 - q^3 = \tfrac{1}{2}p^4, \\
m = 4: &\quad q^2 - q^3 + q^4 - q^5 = \tfrac{1}{2}p^6, \\
m = 6: &\quad q^2 - q^3 + q^4 - q^5 + q^6 - q^7 = \tfrac{1}{2}p^8, \\
m = 8: &\quad q^2 - q^3 + q^4 - q^5 + q^6 - q^7 + q^8 - q^9 = \tfrac{1}{2}p^{10}, \\
&\quad \text{etc.,}
\end{aligned}$$

darauf für die ungeraden Werte

$$\begin{aligned}
m = 1: &\quad q^2 = 2p^3, \\
m = 3: &\quad 3q^2 + q^3 - 3q^4 = 3p^5, \\
m = 5: &\quad 5q^2 - q^3 - q^4 + 3q^5 + 5q^6 = 4p^7, \\
m = 7: &\quad 7q^2 - 3q^3 + q^4 + q^5 - 3q^6 + 5q^7 - 7q^8 = 5p^9, \\
m = 9: &\quad 9q^2 - 5q^3 + 3q^4 - q^5 - q^6 + 3q^7 - 5q^8 + 7q^9 - 9q^{10} = 6p^{11}, \\
&\quad \text{etc.}
\end{aligned}$$

III. Wenn wir festlegen $n = 3$, werden die einzelnen Fälle angenehm gründlich untersucht und es gilt: Zuerst für die gerade Zahlen m

$$\begin{aligned}
m = 1: &\quad q^2 + q^3 = 3p^4, \\
m = 3: &\quad 6q^2 + 6q^3 + 3q^4 - 6q^5 = 7p^6, \\
m = 5: &\quad 15q^2 - 5q^3 + 6q^4 - 7q^5 + 10q^6 - 15q^7 = 13p^8, \\
m = 7: &\quad 28q^2 - 14q^3 + 13q^4 - 12q^5 + 13q^6 - 16q^7 + 21q^8 - 28q^9 = 21p^{10}, \\
&\quad \text{etc.,}
\end{aligned}$$

für die geraden Ordnungen hingegen

$$\begin{aligned}
m=2: &\quad 3q^2+q^3-3q^4=3p^5,\\
m=4: &\quad 10q^2-2q^3-2q^4+6q^5-10q^6=8p^7,\\
m=6: &\quad 21q^2-9q^3+3q^4+3q^5-9q^6+15q^7-21q^8=15p^9,\\
m=8: &\quad 36q^2-20q^3+12q^4-4q^5-4q^6+12q^7-20q^8+28q^9-36q^{10}=24p^{11},\\
&\quad \text{etc.;}
\end{aligned}$$

hier wird sich für jede der beiden Ordnungen die Form der Gleichung im Allgemeinen ausgedrückt so verhalten: wenn m eine gerade Zahl ist

$$\begin{aligned}
(m+1)q^2-(m-3)q^3+(m-5)q^4-(m-7)q^5+\ldots-(m+1)q^{m+2}\\
=\frac{m+4}{2}p^{m+3};
\end{aligned}$$

wenn m eine ungerade Zahl ist

$$\begin{aligned}
m(m+1)q^2-(mm-3m)q^3+(mm-5m+12)q^4-(mm-7m+24)q^5\\
+(mm-9m+40)q^6-(mm-11m+60)q^7+\ldots-m(m+1)q^{m+2}\\
=\frac{mm+4m+7}{2}p^{m+3}.
\end{aligned}$$

§30. Nun wollen wir die einzelnen Ordnungen durchgehen und die durch die zweite Methode gefundenen Gleichungen mithilfe der Formel $p^\mu=q^\mu+q^{m+n-\mu}-p^{m+n}$ auf ähnliche Formen, von welcher Art wir sie hier erhalten haben, zurückführen.

ORDNUNG $m+n=3$

Meth. I	Meth. II	Meth. III
$q+q^2=p+p^3$	$q^2=2p^3$	$q^2=2p^3$.

ORDNUNG $m+n=4$

$q+q^3=p+p^4$	$3q^2-q^3=4p^4$	$q^2+q^3=3p^4$,
$2q^2=p^2+p^4$	$4q^2-4q^3=2p^4$	$2q^2-2q^3=p^4$;

also $q^2=\frac{7}{4}p^4$ und $q^3=\frac{5}{4}p^4$, wegen $p^2=\frac{5}{2}p^4$ also $q^3=\frac{1}{2}p^2$.

Ordnung $m+n=5$

$$\begin{array}{r|r|r}
q+q^4=p+p^5 & q^2+q^3+q^4=4p^5 & q^2+q^3+q^4=4p^5, \\
q^2+q^3=p^2+p^5 & 0=0 & 3q^2+q^3-3q^4=3p^5;
\end{array}$$

$$q^4=3p^5-p^2+p^3,\quad q^3=-\tfrac{9}{2}p^5+3p^2,\quad q^2=\tfrac{11}{2}p^5-2p^2.$$

Ordnung $m+n=6$

$$\begin{array}{r|r|r}
q+q^5=p+p^6 & 3q^2-q^3+3q^4+q^5=6p^6 & q^2+q^3+q^4+q^5=5p^6, \\
q^2+q^4=p^2+p^6 & 8q^2-2q^3+5q^4-8q^5=8p^6 & 4q^2+2q^3+q^4-4q^5=6p^6, \\
2q^3=p^3+p^6 & 12q^2+6q^4-12q^5=14p^6 & 6q^2+3q^4-6q^5=7p^6, \\
 & & q^2-q^3+q^4-q^5=\tfrac{1}{2}p^6.
\end{array}$$

Also

$$q^5=p^2-\tfrac{1}{2}p^3,\ q^4=p^3-\tfrac{1}{3}p^6,\ q^3=\tfrac{1}{2}p^3+\tfrac{1}{2}p^6,\ q^2=p^2-p^3+\tfrac{4}{3}p^6,\ q^5=\tfrac{7}{2}p^6-p^2-\tfrac{1}{2}p^3.$$

Wegen $p^2=\frac{7}{4}p^6$ wird sein

$$q^5=-\tfrac{7}{2}p^6+3p^2-\tfrac{1}{2}p^3,\ q^5=\tfrac{7}{4}p^6-\tfrac{1}{2}p^3,\ q^4=-\tfrac{1}{3}p^6+p^3,\ q^3=\tfrac{1}{2}p^6+\tfrac{1}{2}p^3,\ q^2=\tfrac{37}{12}p^6-p^3.$$

Ordnung $m+n=7$

$$\begin{array}{r|r}
q+q^6=p+p^7 & q^2+q^3+q^4+q^5+q^6=6p^7 \\
q^2+q^5=p^2+p^7 & 4q^3+3q^4-2q^5=6p^7 \\
q^3+q^4=p^3+p^7 & 4q^3+3q^4-2q^5=6p^7
\end{array}$$

$$\begin{array}{|r}
q^2+q^3+q^4+q^5+q^6=6p^7, \\
5q^2+3q^3+2q^4+q^5-5q^6=10p^7, \\
10q^2+2q^3+q^4+4q^5-10q^6=14p^7, \\
10q^2-2q^3-2q^4+6q^5-10q^6=8p^7, \\
5q^2-q^3-q^4+3q^5-5q^6=4p^7;
\end{array}$$

daher wird gefolgert

$$\begin{aligned}
q^6 &= +4p^7 - p^2 - p^3,\\
q^5 &= -10p^7 + 5p^2 + 2p^3,\\
q^4 &= +18p^7 - 10p^2,\\
q^3 &= -17p^7 + 10p^2 + p^3,\\
q^2 &= +11p^7 - 4p^2 - 2p^3.
\end{aligned}$$

ORDNUNG $m + n = 8$

$$\begin{array}{r|r}
q + q^7 = p + p^8 & 3q^2 - q^3 + 3q^4 - q^5 + 3q^6 - q^7 = 8p^8 \\
q^2 + q^6 = p^2 + p^8 & 12q^2 - 2q^3 + 9q^4 - 4q^5 + 7q^6 - 12q^7 = 18p^8 \\
q^3 + q^5 = p^3 + p^8 & 30q^2 \;*\; +9q^4 - 6q^5 + 15q^6 - 30q^7 = 38p^8 \\
2q^4 = p^4 + p^8 & 40q^2 \;*\; +4q^4 - 8q^5 + 20q^6 - 40q^7 = 42p^8
\end{array}$$

$$\left|\begin{aligned}
q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + q^6 + q^7 &= 7p^8,\\
6q^2 + 4q^3 + 3q^4 + 2q^5 + q^6 - 6q^7 &= 15p^8,\\
15q^2 + 5q^3 + 3q^4 + q^5 + 5q^6 - 15q^7 &= 25p^8,\\
20q^2 \;*\; +2q^4 - 4q^5 + 10q^6 - 20q^7 &= 21p^8,\\
15q^2 - 5q^3 + 6q^4 - 7q^5 + 10q^6 - 15q^7 &= 13p^8,\\
q^2 - q^3 + q^4 - q^5 + q^6 - q^7 &= \tfrac{1}{2}p^8;
\end{aligned}\right.$$

und daher wird gefunden

$$\begin{aligned}
q^7 &= \tfrac{9}{2}p^8 - p^2 - p^3 - \tfrac{1}{2}p^4,\\
q^7 &= -\tfrac{9}{2}p^8 + 3p^2 - p^3 + \tfrac{3}{2}p^4,\\
q^7 &= p^2 - p^3 + \tfrac{1}{2}p^4;
\end{aligned}$$

alle übrigen Gleichungen verschmelzen zu dieser einen

$$4q^5 + 10q^6 = 20p^3 - 9p^4$$

wegen $7p^8 = 6p^4$ und auch diese dritte Methode verschafft keine vollständige Bestimmung, obwohl dennoch für die Fälle $m + n = 5$ und $m + n = 7$ dargereicht worden war.

ORDNUNG $m + n = 9$

Hier werden wir mithilfe der dritten alle Dinge bestimmen und das auf eine einzige Weise, wie folgt

$$\begin{aligned}
q^8 &= +5p^9 - p^2 - p^3 - p^4,\\
q^7 &= -\tfrac{35}{2}p^9 + 7p^2 + 2p^3 + 4p^4,\\
q^6 &= +\tfrac{85}{2}p^9 - 21p^2 \;*\; -6p^4,\\
q^5 &= -\tfrac{125}{2}p^9 + 35p^2 \;*\; +5p^4,\\
q^4 &= +\tfrac{127}{2}p^9 - 35p^2 \;*\; -4p^4,\\
q^3 &= -\tfrac{83}{2}p^9 + 21p^2 + p^3 + 6p^4,\\
q^2 &= +\tfrac{37}{2}p^9 - 6p^2 - 2p^3 - 4p^4.
\end{aligned}$$

Nachdem die zehnte Ordnung weggelassen ist, bemerke ich, dass auch die der elften vollkommen bestimmt werden können; nach Ausführen der Rechnung wird nämlich aufgefunden

$$\begin{aligned}
q^{10} &= 6p^{11} - p^2 - p^3 - p^4 - p^5,\\
q^9 &= -27p^{11} + 9p^2 + 2p^3 + 6p^4 + 4p^5,\\
q^8 &= +83p^{11} - 36p^2 \;*\; -15p^4 - 6p^5,\\
q^7 &= -\tfrac{329}{2}p^{11} + 84p^2 \;*\; +21p^4 + 4p^5,\\
q^6 &= +\tfrac{463}{2}p^{11} - 126p^2 \;*\; -21p^4,\\
q^5 &= -\tfrac{461}{2}p^{11} + 126p^2 \;*\; +21p^4 + p^5,\\
q^4 &= +\tfrac{331}{2}p^{11} - 84p^2 \;*\; -20p^4 - 4p^5,\\
q^3 &= -82p^{11} + 36p^2 + p^3 + 15p^4 + 6p^5,\\
q^2 &= +28p^{11} - 8p^2 - 2p^3 - 6p^4 - 4p^5.
\end{aligned}$$

§31. Wenn wir diese Gleichungen aufmerksam betrachten, entdecken wir in den Koeffizienten des ersten Termes nicht schwer die folgende Struktur

p^{11}	p^{9}	p^{7}	p^{5}
$m+n=11$	$m+n=9$	$m+n=7$	$m+n=5$
$6=\frac{11+1}{2}$	$5=\frac{9+1}{2}$	$4=\frac{7+1}{2}$	$3=\frac{5+1}{2}$
$2\cdot 27=10\cdot 6-6$	$2\cdot\frac{35}{2}=8\cdot 5-5$	$2\cdot 10=6\cdot 4-4$	$2\cdot\frac{9}{2}=4\cdot 3-3$
$3\cdot 83=9\cdot 27+6$	$3\cdot\frac{85}{2}=7\cdot\frac{35}{2}+5$	$3\cdot 18=5\cdot 10+4$	$3\cdot\frac{11}{2}=3\cdot\frac{9}{2}+3$
$4\cdot\frac{329}{2}=8\cdot 83-6$	$4\cdot\frac{125}{2}=6\cdot\frac{85}{2}-5$	$4\cdot 17=4\cdot 18-4$	$4\cdot 2=2\cdot\frac{11}{2}-3;$
$5\cdot\frac{463}{2}=7\cdot\frac{329}{2}+6$	$5\cdot\frac{127}{2}=5\cdot\frac{125}{2}+5$	$5\cdot 11=5\cdot 17+4$	
$6\cdot\frac{461}{2}=6\cdot\frac{463}{2}-6$	$6\cdot\frac{83}{2}=4\cdot\frac{127}{2}-5$	$6\cdot 3=2\cdot 11-4;$	
$7\cdot\frac{331}{2}=5\cdot\frac{461}{2}+6$	$7\cdot\frac{37}{2}=3\cdot\frac{83}{2}+5$		
$8\cdot 82=4\cdot\frac{331}{2}-6$	$8\cdot 4=2\cdot\frac{37}{2}-5;$		
$9\cdot 28=3\cdot 82+6$			
$10\cdot 5=2\cdot 28-6;$			
es ist nämlich	es ist nämlich	es ist nämlich	es ist nämlich
$q=-5p^{11}+p+p^2+p^3+p^4+p^5.$	$q=-4p^9+p+p^2+p^3+p^4.$	$q=-3p^7+p+p^2+p^3.$	$q=-2p^5+p+p^2.$

§32. Wir wollen versuchen, daraus die Gleichung für die Ordnung $m+n=13$ zu derivieren, weil ja zugleich das Fortschreitungsgesetz für die ungeraden Ordnungen klar gemacht wird.

$$\begin{array}{lllll}
q^{12} = +Ap^{13} - & p^2 - & p^3 - & p^4 - & p^5 - \ p^6, \\
q^{11} = -Bp^{13} + & 11p^2 + & 2p^3 + & 8p^4 + & 4p^5 + \beta p^6, \\
q^{10} = +Cp^{13} - & 55p^2 & * \ - & 28p^4 - & 6p^5 - \gamma p^6, \\
q^{9} = -Dp^{13} + & 165p^2 & * \ + & (56+1)p^4 + & 4p^5 + \delta p^6, \\
q^{8} = +Ep^{13} - & 330p^2 & * \ - & (70+8)p^4 & * \ - \epsilon p^6, \\
q^{7} = -Fp^{13} + & 462p^2 & * \ + & (56+28)p^4 & * \ + \zeta p^6, \\
q^{6} = +Gp^{13} - & 462p^2 & * \ - & (28+56)p^4 & * \ - \eta p^6, \\
q^{5} = -Hp^{13} + & 330p^2 & * \ + & (8+70)p^4 + & p^5 + \theta p^6, \\
q^{4} = +Ip^{13} - & 165p^2 & * \ - & 56p^4 - & 4p^5 - \iota p^6, \\
q^{3} = -Kp^{13} + & 55p^2 + & p^3 + & 28p^4 + & 6p^5 + \chi p^6, \\
q^{2} = +Lp^{13} - & (11-1)p^2 - & 2p^3 - & 8p^4 - & 4p^5 - \lambda p^6.
\end{array}$$

Für die Unbekannten ist

$$
\begin{array}{rlll}
A = \frac{13+1}{2}, & A = 7, & \lambda = \beta, & \\
2B = 12A - 7, & B = \frac{77}{2}, & \chi = \gamma, & \\
3C = 11B + 7, & C = \frac{287}{2}, & \iota = \delta, & \\
4D = 10C - 7, & D = 357, & \theta = \epsilon, & \\
5E = 9D + 7, & E = 644, & \eta = \zeta - 1 & \\
6F = 8E - 7, & F = \frac{1715}{2}, & \text{und es wird} & \text{gesehen, dass ist} \\
7G = 7F + 7, & G = \frac{1717}{2}, & \beta = 6, & \lambda = 6, \\
8H = 6G - 7, & H = 643, & \gamma = 15, & \chi = 15, \\
9I = 5H + 7, & I = 358, & \delta = 20, & \iota = 20, \\
10K = 4I - 7, & K = \frac{285}{2}, & \epsilon = 15, & \theta = 15, \\
11L = 3K + 7, & L = \frac{79}{2}, & \zeta = 6 + 1, & \eta = 6.
\end{array}
$$

§33. Damit die Struktur dieser Gleichungen deutlicher erkannt werden und die hier auftauchenden Unregelmäßigkeiten verschwinden, werden wir gemäß der einzelnen ungeraden Ordnungen diese Gleichungen so darstellen:

ORDNUNG $m + n = 3$

$$
\begin{array}{r|l}
q^2 = Ap^3 & A = \frac{3+1}{2} = 2 \\
q = -Bp^3 + p & 2B = 2A - 2
\end{array}
$$

ORDNUNG $m + n = 5$

$$
\begin{array}{r|l}
q^4 = +Ap^5 - p^2 & A = \frac{5+1}{2} = 3 \\
q^3 = -Bp^5 + 3p^2 & 2B = 4A - 3 \\
q^2 = +Cp^5 - 3p^2 + p^2 & 3C = 3B + 3 \\
q = -Dp^5 + p^2 + p & 4D = 2C - 3
\end{array}
$$

Ordnung $m + n = 7$

$$\begin{array}{rl|l}
q^6 &= +Ap^7 - p^2 - p^3 & A = \frac{7+1}{2} = 4 \\
q^5 &= -Bp^7 + 5p^2 + 2p^3 & 2B = 6A - 4 \\
q^4 &= +Cp^7 - 10p^2 \;\; * & 3C = 5B + 4 \\
q^3 &= -Dp^7 + 10p^2 \;\; * \;\; +p^3 & 4D = 4C - 4 \\
q^2 &= +Ep^7 - 5p^2 - 2p^3 + p^2 & 5E = 3D + 4 \\
q &= -Fp^7 + p^2 + p^3 + p & 6F = 2E - 4
\end{array}$$

Ordnung $m + n = 9$

$$\begin{array}{rl|l}
q^8 &= +Ap^9 - p^2 - p^3 - p^4 & A = \frac{9+1}{2} = 5 \\
q^7 &= -Bp^9 + 7p^2 + 2p^3 + 4p^4 & 2B = 8A - 5 \\
q^6 &= +Cp^9 - 21p^2 \;\; * \;\; -6p^4 & 3C = 7B + 5 \\
q^5 &= -Dp^9 + 35p^2 \;\; * \;\; +(4+1)p^4 & 4D = 6C - 5 \\
q^4 &= +Ep^9 - 35p^2 \;\; * \;\; -(1+4)p^4 + p^4 & 5E = 5D + 5 \\
q^3 &= -Fp^9 + 21p^2 \;\; * \;\; +6p^4 + p^3 & 6F = 4E - 5 \\
q^2 &= +Gp^9 - 7p^2 - 2p^3 - 4p^4 + p^2 & 7G = 3F + 5 \\
q &= -Hp^9 + p^2 + p^3 + p^4 + p & 8H = 2G - 5
\end{array}$$

Ordnung $m + n = 11$

$$\begin{array}{rl|l}
q^{10} &= +Ap^{11} - p^2 - p^3 - p^4 - p^5 & A = \frac{11+1}{2} = 6 \\
q^9 &= -Bp^{11} + 9p^2 + 2p^3 + 6p^4 + 4p^5 & 2B = 10A - 6 \\
q^8 &= +Cp^{11} - 36p^2 \;\; * \;\; -15p^4 - 6p^5 & 3C = 9B + 6 \\
q^7 &= -Dp^{11} + 84p^2 \;\; * \;\; +(20+1)p^4 + 4p^5 & 4D = 8C - 6 \\
q^6 &= +Ep^{11} - 126p^2 \;\; * \;\; -(15+6)p^4 \;\; * & 5E = 7D + 6 \\
q^5 &= -Fp^{11} + 126p^2 \;\; * \;\; +(6+15)p^4 \;\; * \;\; +p^5 & 6F = 6E - 6 \\
q^4 &= +Gp^{11} - 84p^2 \;\; * \;\; -(1+20)p^4 - 4p^5 + p^4 & 7G = 5F + 6 \\
q^3 &= -Hp^{11} + 36p^2 \;\; * \;\; +15p^4 + 6p^5 + p^3 & 8H = 4G - 6 \\
q^2 &= +Ip^{11} - 9p^2 - 2p^3 - 6p^4 - 4p^5 + p^2 & 9I = 3H + 6 \\
q &= -Kp^{11} + p^2 + p^3 + p^4 + p^5 + p & 10K = 2I - 6
\end{array}$$

ORDNUNG $m+n=13$

$$
\begin{array}{rl|r}
q^{12} &= +Ap^{13} - p^2 - p^3 - p^4 - p^5 - p^6 & A = \frac{13+1}{2} = 7 \\
q^{11} &= -Bp^{13} + 11p^2 + 2p^3 + 8p^4 + 4p^5 + 6p^6 & 2B = 12A - 7 \\
q^{10} &= +Cp^{13} - 55p^2 \; * \; -28p^4 - 6p^5 - 15p^6 & 3C = 11B + 7 \\
q^{9} &= -Dp^{13} + 165p^2 + \; * \; + (56+1)p^4 + 4p^5 + 20p^6 & 4D = 10C - 7 \\
q^{8} &= +Ep^{13} - 330p^2 \; * \; -(70+8)p^4 - \; * \; - 15p^6 & 5E = 9D + 7 \\
q^{7} &= -Fp^{13} + 462p^2 \; * \; +(56+28)p^4 + \; * \; + (6+1)p^6 & 6F = 8E - 7 \\
q^{6} &= +Gp^{13} - 462p^2 \; * \; -(28+56)p^4 \; * \; -(1+6)p^6 + p^6 & 7G = 7F + 7 \\
q^{5} &= -Hp^{13} + 330p^2 \; * \; +(8+70)p^4 \; * \; +15p^6 + p^5 & 8H = 6G - 7 \\
q^{4} &= +Ip^{13} - 165p^2 \; * \; -(1+56)p^4 - 4p^5 - 20p^6 + p^4 & 9I = 5H + 7 \\
q^{3} &= -Kp^{13} + 55p^2 \; * \; +28p^4 + 6p^5 + 15p^6 + p^3 & 10K = 4I - 7 \\
q^{2} &= +Lp^{13} - 11p^2 - 2p^3 - 8p^4 - 4p^5 - 6p^6 + p^2 & 11L = 3K + 7 \\
q &= -Mp^{13} + p^2 + p^3 + p^4 + p^5 + p^6 + p & 12M = 2L - 7
\end{array}
$$

§34. Hier scheinen die Koeffizienten von p^2 vom Bildungsgesetz der folgenden geraden Ordnungen abzuweichen, weil sie in der Ordnung $m+n=13$ aus den Koeffizienten des zur Potenz 11 erhobenen Binoms gebildet werden, während die folgenden aus den Potenzen $8, 6$ gebildet werden. Aber dieselben können mit jenem Koeffizienten auf diese Koeffizienten dargestellt werden, dass sie mit dem Bildungsgesetz der folgenden zusammenhängen:

$$-1, \quad +(10+1), \quad -(45+10), \quad +(120+45), \quad -(210+120), \quad \text{etc.};$$

auf diese Weise werde ich also die Gleichung der Ordnung $m+n=15$ darbieten.

ORDNUNG $m+n=15$

$$
\begin{array}{rlrrrr}
q^{14} = & +Ap^{15} - & p^2 - \;\; p^3 - & p^4 - \;\; p^5 - & p^6 - \;\; p^7, \\
q^{13} = & -Bp^{15} + & (12+1)p^2 + 2p^3 + & 10p^4 + 4p^5 + & 8p^6 + \;\; 6p^7, \\
q^{12} = & +Cp^{15} - & (66+12)p^2 \quad * \quad - & 45p^4 - 6p^5 - & 28p^6 - 15p^7, \\
q^{11} = & -Dp^{15} + & (220+66)p^2 \quad * \quad + & (120+1)p^4 + 4p^5 + & 56p^6 + 20p^7, \\
q^{10} = & +Ep^{15} - & (495+220)p^2 \quad * \quad - & (210+10)p^4 - * \quad - & 70p^6 - 15p^7,
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
q^9 & = & -Fp^{15} + (792+495)p^2 \quad * \quad + \; (252+45)p^4 \quad * \quad + (56+1)p^6 + \; 6p^7, \\
q^8 & = & +Gp^{15} - (924+792)p^2 \quad * \quad - (210+120)p^4 \quad * \quad - (28+8)p^6 \quad * \quad , \\
q^7 & = & -Hp^{15} + (792+924)p^2 \quad * \quad + (120+210)p^4 \quad * \quad + (8+28)p^6 \quad * \quad + p^7, \\
q^6 & = & +Ip^{15} - (495+792)p^2 \quad * \quad - \; (45+252)p^4 \quad * \quad - (1+56)p^6 - \; 6p^7 + p^6, \\
q^5 & = & -Kp^{15} + (220+495)p^2 \quad * \quad + \; (10+210)p^4 \quad * \quad + \quad 70p^6 + \; 15p^7 + p^5, \\
q^4 & = & +Lp^{15} - \; (66+220)p^2 \quad * \quad - \; (1+120)p^4 - 4p^5 - \quad 56p^6 - \; 20p^7 + p^4, \\
q^3 & = & -Mp^{15} + \; (12+66)p^2 \quad * \quad + \quad 45p^4 + 6p^5 + \quad 28p^6 + \; 15p^7 + p^3, \\
q^2 & = & +Np^{15} - \; (1+12)p^2 - 2p^3 - \quad 10p^4 - 4p^5 - \quad 8p^6 - \; 6p^7 - p^2, \\
q & = & -Op^{15} + \quad p^2 + \; p^3 + \quad p^4 + \; p^5 + \quad p^6 + \; p^7 + \; p.
\end{array}
$$

Und nun ist das Fortschreitungsgesetz nicht allzu komplex und lässt sich leicht an die höheren Ordnungen anpassen.

§35. Weil aber dieses Gesetz, weil es ja doch auf Induktion gestützt ist, weniger sicher scheinen könnte, werden gänzlich alle Zweifel beseitigt werden können, wenn anstelle der geraden Potenzen von p ungerade eingeführt werden, weil natürlich für die elfte Ordnung den Potenzen p^2 und p^4 die ungeraden p^9 und p^7 gleichwertig sind.Darauf können auch die Koeffizienten A, B, C, D, etc. mit einem um vieles einfacheren Gesetz dargeboten werden, welche unmittelbar aus den Koeffizienten des zur selben Potenz, von welcher Ordnung diese Gleichungen gesucht werden, erhobenen Binoms fließt, und zwar auf diese Weise:

ORDNUNG $m + n = 11$

p^{11}	p^1	p^3	p^5	p^7	p^9	
$q^{10} = \frac{1}{2}(1+11)$	-1	-1	-1	-1	-1	$+p = p^{10}$
$q^9 = \frac{1}{2}(1-55)$	$*$	$+2$	$+4$	$+6$	$+8+1$	
$q^8 = \frac{1}{2}(1+165)$	$*$	-1	-6	-15	$-28-8$	$+p^3 = p^8$
$q^7 = \frac{1}{2}(1-330)$	$*$	$*$	$+4$	$+20+1$	$+56+28$	
$q^6 = \frac{1}{2}(1+462)$	$*$	$*$	-1	$-15-6$	$-70-56$	$+p^5 = p^6$
$q^5 = \frac{1}{2}(1-462)$	$*$	$*$	$+1$	$+6+15$	$+56+70$	
$q^4 = \frac{1}{2}(1+330)$	$*$	$*$	-4	$-1-20$	$-28-56$	$+p^7 = p^4$
$q^3 = \frac{1}{2}(1-165)$	$*$	$+1$	$+6$	$+15$	$+8+28$	
$q^2 = \frac{1}{2}(1+55)$	$*$	-2	-4	-6	$-1-8$	$+p^9 = p^2$
$q^1 = \frac{1}{2}(1-11)$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	

In jeder beliebigen vertikalen Spalte werden natürlich die Koeffizienten des zur um eine Einheit geringeren Potenzen erhobenen Binoms sowohl von der höchsten nach unten wie von der untersten nach oben geschrieben und, wo zwei zusammenlaufen, werden sie zu einer Summe gesammelt.

§36. Daher wird es nun möglich sein,für alle ungeraden Ordnungen die Sachen im Allgemeinen zu definieren; aber weil ja hier die Koeffizienten eines Binoms von Potenzen auftauchen, damit wir für Kürze sorgen, wollen wir schreiben

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-\nu-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots \nu} = n(\nu),$$

dass gilt

$$n(0) = 1, \quad n(1) = n, \quad n(2) = \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}, \quad n(3) = \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}, \quad \text{etc.,}$$

wo es förderlich sein wird bemerkt zu haben, wenn ν größer war als n, dass immer $n(\nu) = 0$ ist, aber wenn $\nu = n$, dass $n(n) = 1$ und allgemein $n(\nu) = n(n-\nu)$ sein wird. Nach Erhalt dieser Notation werden sich die allgemeinen Gleichungen verhalten:

$$
\begin{aligned}
q^{\lambda-1} &= p^{\lambda-1} + \frac{1}{2}(1+\lambda(1))p^{\lambda} \left.\begin{matrix} +0(0) \\ +0(\lambda-2) \end{matrix}\right\} p \left.\begin{matrix} +2(0) \\ +2(\lambda-2) \end{matrix}\right\} p^3 \left.\begin{matrix} +4(0) \\ +4(\lambda-2) \end{matrix}\right\} p^5 \text{ etc.} \\
q^{\lambda-2} &= \quad * \quad + \frac{1}{2}(1-\lambda(2))p^{\lambda} \left.\begin{matrix} -0(1) \\ -0(\lambda-3) \end{matrix}\right\} p \left.\begin{matrix} -2(1) \\ -2(\lambda-3) \end{matrix}\right\} p^3 \left.\begin{matrix} -4(1) \\ -4(\lambda-3) \end{matrix}\right\} p^5 \text{ etc.} \\
q^{\lambda-3} &= p^{\lambda-3} + \frac{1}{2}(1+\lambda(3))p^{\lambda} \left.\begin{matrix} +0(2) \\ +0(\lambda-4) \end{matrix}\right\} p \left.\begin{matrix} +2(2) \\ +2(\lambda-4) \end{matrix}\right\} p^3 \left.\begin{matrix} +4(2) \\ +4(\lambda-4) \end{matrix}\right\} p^5 \text{ etc.} \\
q^{\lambda-4} &= \quad * \quad + \frac{1}{2}(1-\lambda(4))p^{\lambda} \left.\begin{matrix} -0(3) \\ -0(\lambda-5) \end{matrix}\right\} p \left.\begin{matrix} -2(3) \\ -2(\lambda-5) \end{matrix}\right\} p^3 \left.\begin{matrix} -4(3) \\ -4(\lambda-5) \end{matrix}\right\} p^5 \text{ etc.} \\
q^{\lambda-5} &= p^{\lambda-5} + \frac{1}{2}(1+\lambda(5))p^{\lambda} \left.\begin{matrix} +0(4) \\ +0(\lambda-6) \end{matrix}\right\} p \left.\begin{matrix} +2(4) \\ +2(\lambda-6) \end{matrix}\right\} p^3 \left.\begin{matrix} +4(4) \\ +4(\lambda-6) \end{matrix}\right\} p^5 \text{ etc.}
\end{aligned}
$$

etc.,

woher wir schließen, dass im Allgemeinen wird:
I. wenn ν eine ungerade Zahl ist

$$
\begin{aligned}
q^{\lambda-\nu} = p^{\lambda-\nu} + \frac{1}{2}(1+\lambda(\nu))p^{\lambda} & \left.\begin{matrix} +0(\nu-1) \\ +0(\lambda-\nu-1) \end{matrix}\right\} p \quad \left.\begin{matrix} +2(\nu-1) \\ +2(\lambda-\nu-1) \end{matrix}\right\} p^3 \\
& \left.\begin{matrix} +4(\nu-1) \\ +4(\lambda-\nu-1) \end{matrix}\right\} p^5 \quad \left.\begin{matrix} +6(\nu-1) \\ +6(\lambda-\nu-1) \end{matrix}\right\} p^7 \text{ etc.;}
\end{aligned}
$$

II. wenn ν eine gerade Zahl ist

$$
\begin{aligned}
q^{\lambda-\nu} = \; * \; + \frac{1}{2}(1-\lambda(\nu))p^{\lambda} & \left.\begin{matrix} -0(\nu-1) \\ -0(\lambda-\nu-1) \end{matrix}\right\} p \quad \left.\begin{matrix} -2(\nu-1) \\ -2(\lambda-\nu-1) \end{matrix}\right\} p^3 \\
& \left.\begin{matrix} -4(\nu-1) \\ -4(\lambda-\nu-1) \end{matrix}\right\} p^5 \quad \left.\begin{matrix} -6(\nu-1) \\ -6(\lambda-\nu-1) \end{matrix}\right\} p^7 \text{ etc.}
\end{aligned}
$$

Die Terme dieser Gleichungen müssen aber nicht weiter als die Formel $p^{\lambda-2}$, die den letzten Term liefert, fortgesetzt werden.

§37. Aber diese Summationen haben nur Geltung, wenn der Exponent $m + n = \lambda$ eine ungerade Zahl war; und daher ist es auch möglich mithilfe von diesen Gleichungen die Summen aller in dieser Form enthaltenen Reihen

$$q^m = 1 + \frac{1}{2^m}(1+\frac{1}{2^n}) + \frac{1}{3^m}(1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}) + \frac{1}{4^m}(1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}) + \text{etc.}$$

darzubieten, wenn nur $m+n=\lambda$ eine ungerade Zahl ist. Aber diese Summen werden durch die Summen der reziproken Potenzen definiert, welche ich mit dem Buchstaben p auf diese folgende Weise darstelle

$$p^\lambda = 1 + \frac{1}{2^\lambda} + \frac{1}{3^\lambda} + \frac{1}{4^\lambda} + \frac{1}{5^\lambda} + \text{etc.}$$

und

$$p^m = p^n = (1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{4^m}+\text{etc.})(1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\text{etc.})$$

Hier müssen aber zwei Fälle unterschieden werden, je nach dem ob m entweder eine gerade oder eine ungerade Zahl war; man wird nämlich haben: **I.** im Fall, in dem m eine gerade Zahl ist,

$$\begin{aligned} q^m = p^m + \frac{1}{2}(1+\lambda(n))p^\lambda & \left.\begin{matrix} +0(n-1) \\ +0(m-1) \end{matrix}\right\} p \quad \left.\begin{matrix} +2(n-1) \\ +2(m-1) \end{matrix}\right\} p^3 \\ & \left.\begin{matrix} +4(n-1) \\ +4(m-1) \end{matrix}\right\} p^5 \quad \left.\begin{matrix} +6(n-1) \\ +6(m-1) \end{matrix}\right\} p^7 \ldots \quad \left.\begin{matrix} +(\lambda-3)(n-1) \\ +(\lambda-3)(m-1) \end{matrix}\right\} p^{\lambda-2}; \end{aligned}$$

II. im Fall, in dem m eine ungerade Zahl ist,

$$\begin{aligned} q^m = \ * \ + \frac{1}{2}(1-\lambda(n))p^\lambda & \left.\begin{matrix} -0(n-1) \\ -0(m-1) \end{matrix}\right\} p \quad \left.\begin{matrix} -2(n-1) \\ -2(m-1) \end{matrix}\right\} p^3 \\ & \left.\begin{matrix} -4(n-1) \\ -4(m-1) \end{matrix}\right\} p^5 \quad \left.\begin{matrix} -6(n-1) \\ -6(m-1) \end{matrix}\right\} p^7 \ldots \quad \left.\begin{matrix} -(\lambda-3)(n-1) \\ -(\lambda-3)(m-1) \end{matrix}\right\} p^{\lambda-2}. \end{aligned}$$

Nach diesem Gesetz würde der dem letzten folgende Term werden

$$\left.\begin{matrix} (\lambda-1)(n-1) \\ (\lambda-1)(m-1) \end{matrix}\right\} p^\lambda,$$

wo angemerkt sei, dass immer gilt

$$(\lambda-1)(n-1) + (\lambda-1)(m-1) = \lambda(n) = \lambda(m).$$

§38. Aber wenn der Exponent der Formel $m+n=\lambda$ eine gerade Zahl war, können diese Formeln in keinster Weise Geltung haben, weil im Fall der Ungeradheit die Formen p, p^3, p^5, p^7 etc. wegen $p^m = p^n$ auch diese geraden p^2, p^4, p^6 etc. in sich umfassen, was aber im Fall, in dem $m+n$ eine gerade Zahl ist, nicht passiert. Aber die drei hier gebrachten Methoden reichen nicht aus, um die Summen der geraden Ordnungen zu bestimmen, weil sogar die dritte für die achte Ordnung nicht alle Bestimmung darreicht. Auch wenn aber für die vierte und sechste Ordnung die Summen oben angegeben worden sind, wird in ihnen dennoch kein Gesetz erkannt, woher es möglich wäre, für die folgenden Ordnungen eine Vermutung abzuleiten. Die Begründung dieses Unterschiedes ist offenbar darin gelegen, dass für die geraden Ordnungen jegliche zwei dieser Formeln p^λ, p^2, p^4, p^6 etc. miteinander verglichen werden können und diese Vergleiche durch unsere Methode aufgezeigt werden; deshalb die Bestimmungen, derer wir bedürfen, zu fehlen anzusehen sind. Daher ist sich also immer mehr zu wundern, dass in den ungeraden Ordnungen überhaupt kein angebbares Verhältnis zwischen den Formeln p^λ, p^2, p^3, p^4 etc. besteht. Dennoch besteht indes kein Zweifel, dass andere Methoden gegeben sind, mit denen die Reihen der geraden Ordnungen summiert werden können; obgleich die drei hier dargelegten Methoden keineswegs ausreichen.